Alkalmazott Matematikai Lapok **32** (2015), 1–39.

HIPERBOLIKUS WAVELETEK

ARATÓ MÁTYÁS PROFESSZOR EMLÉKÉRE

SCHIPP FERENC

Az utóbbi két évtizedben a wavelet-transzformációk számos típusát vezették be és alkalmazták a matematika, a természet- és műszaki tudományok különböző területein. Ezek a transzformációk egységes elvek szerint származtathatók, felhasználva az absztrakt harmonikus analízis eszköztárát. Ezen az úton, kiindulva az affin csoportból, eljuthatunk az (affin) *wavelet-transzformációhoz,* a Heisenberg-féle csoportból a *Gábor-transzformációhoz.* Véve a hiperbolikus geometria egybevágósági transzformációit, ezekhez hasonló elvek alkalmazásával, bevezettük a *hiperbolikus wavelet transzformációt* (HWT-t). A szóban forgó egybevágósági transzformációk a *Blaschke-függvényekkel* írhatók le. Ezek nemcsak a komplex függvénytanban, hanem az irányításelméletben is kitüntetett szerepet játszanak. Ennek alapján azt reméljük, hogy a HWT a jelfeldolgozásnak és a rendszerelméleti alkalmazásoknak adekvát eszközévé válhat. Ebben a dolgozatban áttekintést nyújtunk néhány HWT-vel összefüggő eredményről és alkalmazásról.

Külön is felhívjuk a figyelmet a magyar matematikusok eredményeire, amelyek jelentősége az irányításelmélet és a jelfeldolgázás területén új megvilágításba kerültek. A trigonometrikus Fourier-sorokra vonatkozó *Fejér-féle szummáció* a háromszög ablaknak megfelelő jelszűrési eljárásként interpretálható. Számos, *Riesz Frigyes* által bevezetett fogalom és nevéhez fűződő eredmény alapvető szerepet játszik ezekben az alkalmazásokban. Ezek közül a matematikusok körében jól ismert klasszikus eredményein túlmenően itt most csak a Hardy-terek faktorizációjára, a róla elnevezett bázis fogalmára, valamint a nemnegatív trigonometrikus polinomok előállítására vonatkozó eredményeire utalunk, amelyek a wavelet konstrukciók alapvető eszközeivé váltak. A *Haar Alfrédről* elnevezett mérték, amely az absztrakt harmonikus analízis egyik legfontosabb fogalma, a jelfeldolgozás transzformációinak leírásában is nélkülözhetetlen eszköznek bizonyult. A *róla elnevezett rendszer,* amelyet 1909-ben egy elméleti probléma tisztázására vezetett be, napjainkban, mint a legegyszerűbb wavelet, vált igazán jelentőssé. Míg az 1960-as években, egyfajta magyar specialitásként, kizárólag csak a hazai egyetemi tankönyvek tesznek említést a Haar-rendszerről, addig manapság szinte minden jelfeldolgozással kapcsolatos tankönyv több fejezetet szentel a rendszernek.

A Haar-rendszerből kiinduló wavelet-transzformáció mellett a *Gábor Dénes* által 1945-ben vizsgált (ablakos) Fourier-transzformáció (azóta Gábor-transzformációnak nevezett eljárás) bizonyult a jelfeldolgozás egyik leghatékony eszközének.

Napjainban az MTA SZTAKI-ban *Bokor József* vezetésével eredményesen alkalmazzák a racionális függvényrendszereket és a hiperbolikus waveleteket az irányításelmélet és a jelfeldolgozás problémáinak a megoldásában. Ezeknek a módszereknek a felhasználásával bíztató eredmények születtek az ELTE Numerikus Analízis Tanszéken EKG-jelek matematikai modellezésében.

1. Történeti áttekintés

A Fourier-sorok elméletének kialakulása szorosan összefügg fontos gyakorlati problémákkal. Már maga *Fourier* is egy fizikából származó feladat, a hővezetés matematikai leírására dolgozta ki módszerét. A matematika számos fejezetének létrejötte és fejlődése szorosan összefügg azokkal a kérdésekkel, amelyek a Fourier-sorok alkalmazásával kapcsolatban felvetődtek. Ezek tisztázása, *Dirichlet* munkássága nyomán a ma is használt függvényfogalom kialakulásához vezetett, *Cantort* a Fourier-sorok konvergencia halmazaival kapcsolatos vizsgálatai inspirálták a halmazelmélet megalapozására. *Riemann* a Fourier-együtthatók értelmezéséhez kiterjesztette az integrál fogalmát, *Lebesgue* a róla elnevezett integrál bevezetésével a Fourier-sorok elméletét gazdagította egy ma is nélkülözhetetlen eszközzel, amely azután a valószínűségelmélet matematikai megalapozásában is fontos szerepet játszott [3], [54], [66], [78].

Az első, mai szemmel nézve is korrekt konvergencia tétel *Dirichlet*-től származik, aki 1829-ben bebizonyította, hogy a szakaszonként monoton függvények Fourier-sora konvergens. Már 1876-ban *Du Bois Reymond* munkássága révén ismert volt, hogy a Fourier-sor 2π szerint periodikus, *folytonos függvény esetén is lehet divergens.* A Fourier-sorok konvergenciájával kapcsolatos problémák tisztázása kapcsán új fogalmakat és módszereket vezettek be, több új fejezettel gazdagítva a matematikát. Többek között a hagyományos, pontonkénti konvergencia helyett az integrálközépben való konvergenciát, a részletösszegek helyett azok számtani közepeinek konvergenciáját véve alapul számos problémára sikerült választ adni. Ezekben *Riesz Frigyes* és *Fejér Lipót* munkássága úttörő jellegű volt [66], [78], [86].

1.1. A Haar-rendszer

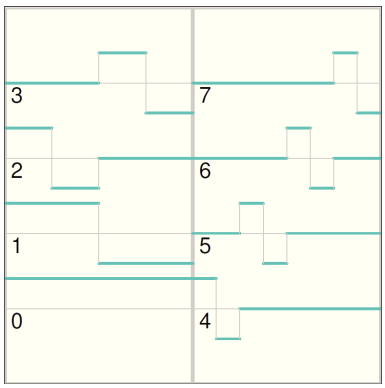
Már a múlt század elején a trigonometrikus rendszer mellett több, akkor kissé egzotikusnak tűnő függvényrendszert vezettek be, amelyek elméleti és gyakorlati jelentősége jóval később derült ki. Ezek között is a *Haar Alfréd* által definiált ortonormált rendszer játszik kitüntetett szerepet. Haar a róla elnevezett rendszert doktori értekezésében vezette be 1909-ben, választ adva *Hilbert* egy Fourier-sorok divergenciájával kapcsolatos problémájára [37]. A Du Bois Reymond-féle ellenpél-

dával összefüggésben Hilbert felvetette, hogy létezik-e olyan ortonormált rendszer, amely szerint vett Fourier-sorfejtés minden folytonos függvényre mindenütt konvergens? A kérdésre Haar pozitív választ adott, bebizonyítva, hogy az azóta róla elnevezett $(h_n, n \in \mathbb{N})$ *rendszer szerinti Fourier-sor minden folytonos függvény esetén egyenletesen konvergens.* Az első pillanatra mesterkéltnek tűnő rendszer lépcsős függvényekből áll, amelyek a

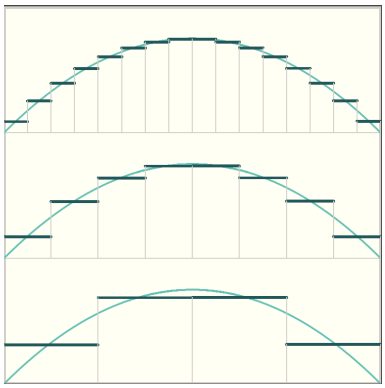
$$h(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0, 1/2)) \\ -1 & (x \in [1/2, 1)) \\ 0 & (x \in [1, \infty)) \end{cases}$$

alapfüggvényből egyszerű transzformációkkal (transzlációval és dilatációval) származtathatók:

$$\begin{aligned} h_0(x) &:= 1, & h_m(x) &:= 2^{n/2} h(2^n x - k) \\ (x \in [0,1), m &:= 2^n + k, & 0 \le k &< 2^n, n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{1}$$



h_m $(m = 0, 1, \ldots, 7)$



$S^H_{2^n} f$ $(n = 2, 3, 4)$

A Haar-rendszer ortonormált az $L^2 := L^2[0,1)$ Hilbert-tér szokásos skaláris szorzatára nézve és az $f \in L^1 := L^1[0,1)$ függvény Haar-Fourier-sorának

$$S^H_m f := \sum_{k=0}^{m-1} \langle f, h_k \rangle h_k \quad (m \in \mathbb{N}), \quad \langle f, h_k \rangle := \int_0^1 f(t) h_k(t)\, dt \ (k \in \mathbb{N})$$

részletösszegei előállíthatók az f függvény diadikus intervallumokra vett *integrálközepeivel*:

$$\begin{aligned} (S_{2^n} f)(x) = (E_n f)(x) &:= \frac{1}{|I|} \int_I f(t)\, dt \\ (x \in I = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) &\in \mathcal{I}_n), \end{aligned} \tag{2}$$

ahol $\mathcal{I}_n$ jelöli a $[0,1)$ intervallum 2^{-n} hosszúságú diadikus részintarvallumainak a halmazát. Innen következik, hogy bármely $f \in L^1$ függvény Haar–Fourier-sora L^1-normában és m.m. konvergál az f-hez és folytonos függvény esetén a konvergencia egyenletes [74],[78]. A Haar-rendszer ezekben a tulajdonságaiban alapvetően különbözik a trigonometrikus rendszertől.

Valószínűségelméleti terminológiát használva E_n a $\mathcal{I}_n$ által generált σ-algebrára vonatkozó feltételes várható érték, továbbá a (2) egyenlőség szerint az $(S_{2^n} f,$ $n \in \mathbb{N})$ részszletösszegek (reguláris, diadikus) *martingált alkotnak.*

A Haar-rendszernek ezek a tuljdonságai szolgáltak a *bázisokkal összefüggő funkcionálanalízisbeli, a martingálelméleti és a waveletekkel kapcsolatos* vizsgálatok kiindulópontjául [14], [17], [54], [74], [82].

A

$$\lim_{n\to\infty} \|f - E_n f\|_{L^p} = 0 \quad (f \in L^p := L^p[0,1), 1 \le p < \infty)$$

egyszerűen igazolható állításból következik, hogy a Haar-rendszer nemcsak az L^2 Hilbert-térben, hanem az L^p $(1 \le p < \infty)$ Banach-terekben is bázist alkot.

A Haar-sorok feltétlen (bármely átrendezés melletti) konvergenciájának vizsgálatában fontos szerepet játszik az f függvény *Paley* által bevezetett

$$Qf := \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, h_k\rangle h_k|^2 \right)^{1/2} \quad (f \in L^1)$$

kvadratikus variációja. Paley bebizonyította, hogy $1 < p < \infty$ esetén az f és a Qf L^p-normái ekvivalensek:

$$\|Qf\|_{L^p} \sim \|f\|_{L^p} \quad (1 < p < \infty).$$

Ennek alapján *Marcinkiewicz* megmutatta, hogy a Haar-rendszer $1 < p < \infty$ esetén *feltétlen* (azaz bármely átrendezés mellett is) *bázis* az L^p térben [74]. A Haar-rendszernek ezek a tulajdonságai a 60-as években, hosszú szünet után, ismét ráirányították a figyelmet a rendszerre. Lengyel és szovjet matematikusok munkássága révén kiderült, hogy a Haar-rendszer eredményesen alkalmazható a fukcionálanalízis fontos problémáinak megoldásában és kitüntetett szerepet játszik a bázisok között. Például többek között kiderült, hogy Banach-terek egy tág osztályára igaz a következő állítás: *ha a szóban forgó Banach-térben a Haar-rendszer nem feltétlen bázis, akkor ebben a térben feltétlen bázis nem létezik.* Speciálisan az L^1 térben nincs feltétlen bázis. Ezekről az eredményrekről nyújt részletes áttekintést *Ciesielski* [17] és *Uljanov* [82] 1985-ben a Haar emlékkonferencián tartott előadása [75].

1.2. A Faber–Schauder-rendszer

Mivel a Haar függvények nem folytonosak, azért ezek nem tartoznak a $C[0,1]$ függvénytérhez. *Faber* 1910-ben a Haar-függvények integrálját véve bevezetett

egy folytonos függvényekből álló rendszert, amely normáló faktortól eltekintve az (1)-hez hasonló alakban adható meg:

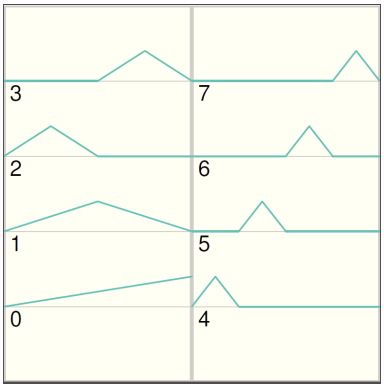
$$\varphi(x) := \int_0^x h(t)\,dt, \qquad \varphi_m(x) := \varphi(2^n x - k) \tag{3}$$
$$(m = 2^n + k,\ 0 \le k < 2^n,\ n, k \in \mathbb{N},\ x \in [0, \infty)).$$

Faber megmutatta, hogy ez a rendszer bázis a $[0, 1]$ végpontjaiban eltűnő folytonos függvények $C_0[0, 1]$ terén. Ezekhez hozzávéve a konstans függvényt és a 0-ban eltűnő lineáris függvényt a $C[0, 1]$ tér egy bázisát kapjuk. Megjegyezzük, hogy ezt a bázist később (1927-ben) *Schauder* újra felfedezte, és azóta ezt a rendszert az irodalomban Faber–Schauder-féle (FS) rendszernek nevezzük. Ez a rendszer nyilván nem ortogonális az L^2-tér skaláris szorzatára nézve. A

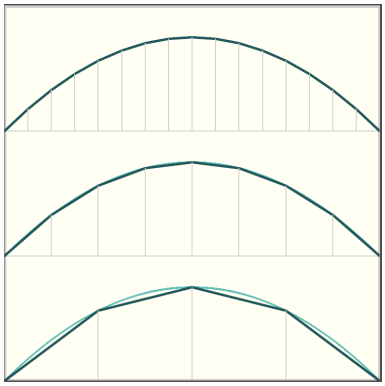
$$[\varphi_n, h_m] := \int_0^1 \varphi_n\,dh_m = 0 \quad (m \ne n, m, n \in \mathbb{N})$$

reláció úgy interpretálható, hogy a folytonos függvényekből álló FS-rendszer és a korlátos változású függvényekből álló Haar-rendszer biortogonális. Megjegyezzük, hogy az $f \in C_0[0, 1]$ függvény FS-rendszer szerinti biortogonális sorfejtésének részletösszegei interpolálnak a diadikusan racionális pontokban [74]:

$$(S_{2^n}^{FS} f)(x) := \sum_{k=0}^{2^n-1} [f, h_k]\varphi_k(x) = f(x) \quad (x = j2^{-n}, 0 \le j \le 2^n, n \in \mathbb{N}).$$



φ_m $(m = 0, 1, \ldots, 7)$



$S_{2^n}^{FS} f$ $(n = 2, 3, 4)$

1.3. A Franklin-rendszer

Franklin 1928-ban az FS-rendszerből kiindulva a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással bevezetett egy (szakaszonként lineáris, más szóval elsőfokú spline

függvényekből álló) ortonormált rendszert, amelyről megmutatta, hogy nemcsak az L^2 térben, hanem a $C[0,1]$-ben is bázis [15], [54], [74]. Az FS-függvények helyett m-edfokú spline függvényekből kiindulva *Ciesielski* [16], [17] sima ortogonális bázisoknak egy széles osztályát vezette be. Ezekkel több, Banach [2] 1932-ben megjelent könyvében említett fontos térben sikerült bázist szerkeszteni. Ezekről Ciesielski a [17] összefoglaló dolgozatában ad részletes áttekintést. *Bockarjev* [5] bebizonyította a Paley-féle egyenlőtlenség megfelelőjét a Franklin-rendszerre, következésképpen kiderült, hogy $1 < p < \infty$ esetén a Franklin-rendszer is feltétlen bázist alkot az L^p-terekben. *Ciesielski, Simon Péter* és *Sjölin* megmutatták, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k$ Haar-sor és a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k$ Franklin-sor L^p-normában ekvikonvergens, ha $1 < p < \infty$, más szóval a szóban forgó rendszerek *ekvivalens bázisok* az L^p $(1 < p < \infty)$ terekben [18] . Ez volt az első nem triviális példa ekvivalens bázisokra. Ezekről további információt nyújt a [74] könyv 5. fejezete.

1.4. A Rademacher- és a Walsh-rendszer

A múlt század elején a Haar-rendszer mellett két további egzotikus rendszert vezettek be, amelyek szoros kapcsolatban állnak a Haar-rendszerrel. *Rademacher* 1922-ben az

$$r(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0,1/2)) \\ -1 & (x \in [1/2,1)) \end{cases}, \qquad r(x+1) = r(x) \ (x \geq 0)$$

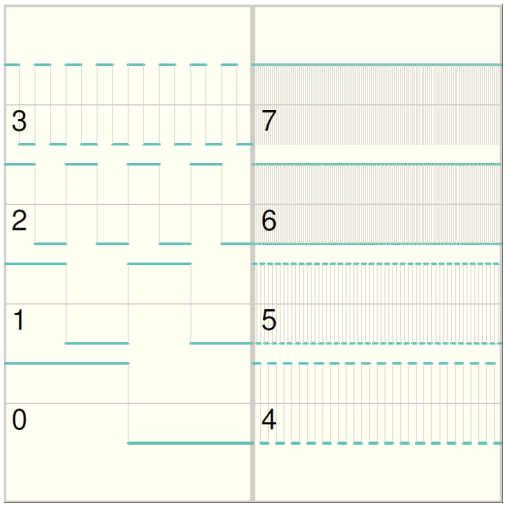
1 szerint periodikus függvényből kiindulva definiálta az azóta róla elnevezett

$$r_n(x) := r(2^n x) \quad (x \in [0,1), n \in \mathbb{N})$$

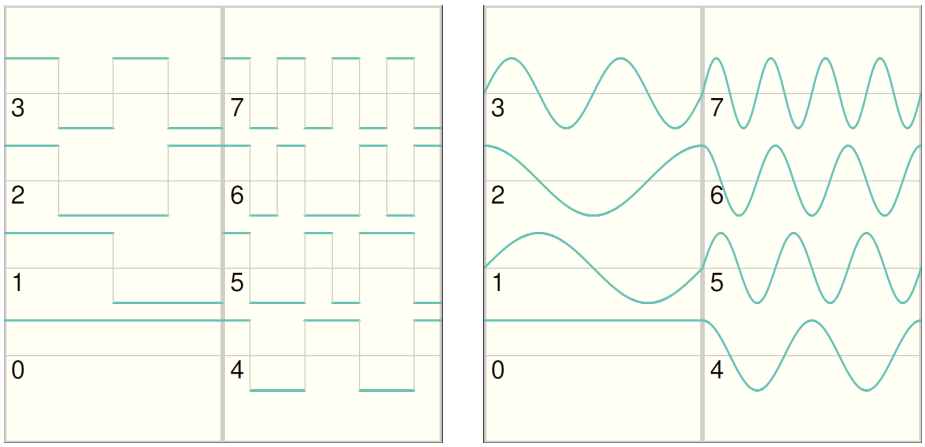
rendszert, amely a függvénysorok konvergencia problémáinak tisztázásában játszott fontos szerepet [1], [74], [78]. Rademacher és *Kolmogorov* megmutatták, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r_n$ Rademacher-sor akkor és csak akkor konvergál majdnem mindenütt, ha teljesül a $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ együttható feltétel. A Rademacher-rendszer hasznos modellnek bizonyult sztochasztikusan független függvényrendszerek vizsgálatában. A független valószínűségi változókból alkotott sorok konvergenciájával kapcsolatos három-sor tételnek az említett Rademacher–Kolmogorov-féle tétel volt a kiinduló pontja.

1923-ban *Walsh* olyan $1, -1$ értékű függvényekből álló rendszert vezetett be a $[0,1)$ intervallumon, amelyre a $t_{2n}(x) := \cos(2\pi nx)$, $t_{2n+1}(x) := \sin(2\pi nx)$ trigonometrikus rendszerhez hasonlóan, az n-edik függvény előjelváltásainak száma n. A rekurzióval definiált rendszer kezelése nehézkesnek bizonyult.

Paley 1932-ben észrevette, hogy a Walsh-rendszer (az eredetitől eltérő sorrendben) a Rademecher-rendszerből származtatható, véve a Rademacher-függvények összes lehetséges véges szorzatát. Ezek felírásához, kiindulva az $n \in \mathbb{N}$ szám 2-es



A Rademacher-rendszer: r_n $(n = 0, 1, \ldots, 7)$



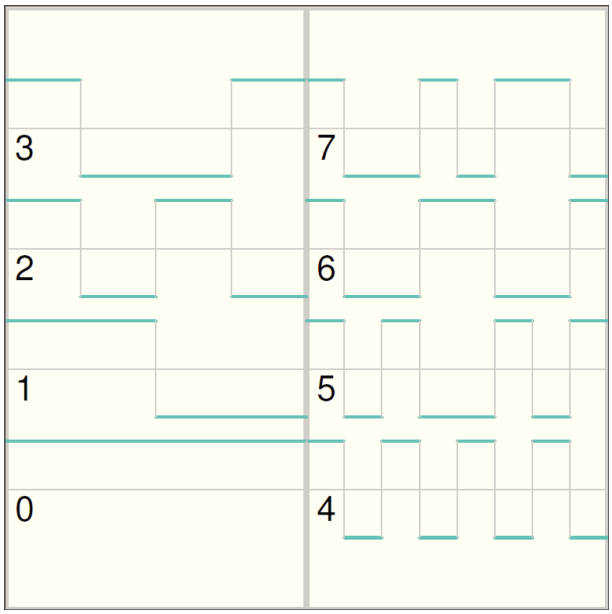
Az eredeti Walsh-rendszer a trigonometrikus rendszer előjelváltásait utánozza

számrendszerbeli előállításából, képezzük a

$$w_n := \prod_{n_j=1} r_j = \prod_{j=0}^{\infty} r_j^{n_j}, \qquad n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j 2^j \in \mathbb{N} \quad (n_j = 0, 1) \tag{4}$$

függvényrendszert, amely sorrendtől eltekintve megegyezik a Walsh által bevezetett rendszerrel, és $w_{2^k} = r_k$ $(k \in \mathbb{N})$. A $(w_n, n \in \mathbb{N})$ rendszert *Walsh–Paley-*

rendszernek nevezzük és egyszerű indextranszformációval származtatható az eredeti Walsh-rendszerből [74]. A fenti előállításból kiidulva és az *Alexits György* [l] által bevezetett szóhasználattal élve azt mondjuk, hogy a Walsh–Paley-rendszer a Rademacher-rendszer *szorzatrendszere.* További, matematikatörténeti vonatkozásokkal kapcsolatban utalunk a [69] dolgozatra.



A Walsh–Paley-féle rendszer

Az $r_k(x)$ és a $w_n(x)$ függvényértékek közvetlenül kifejezhetők az

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-k-1} \in [0,1), \quad x_k = 0,1$$

szám bináris jegyeivel:

$$r_k(x) = (-1)^{x_k}, \quad w_n(x) = (-1)^{\sum_{k=0}^{\infty} n_k x_k},$$

következésképpen ezek a rendszerek hatékonyabban alkalmazhatók a digitális technikában, mint a hagyományos trigonometrikus rendszer. Ez a lehetőség az 1960-as évektől kezdődően felkeltette az átviteltechnikában dolgozó mérnökök figyelmét, hozzájárulva a szóban forgó rendszer elterjedéséhez. Ezzel kapcsolatban utalunk Harmuth [38], [39] könyveire, valamint a [80] interjú kötetre.

A Haar- és a Walsh-rendszer az

$$\left[a_{k\ell}^n\right]_{k,\ell=0}^{2^n-1} \in \mathbb{R}^{2^n\times 2^n}, \quad a_{k\ell}^n := 2^{-n/2} w_\ell(k2^{-n})$$

ortogonális mátrix-transzformációval átvihető egymásba:

$$h_{2^n+k}(x) = 2^{-n/2} r_n(x) \prod_{j=0}^{n-1} \Big(1 + r_j(k2^{-n}) r_j(x)\Big) =$$
$$= \sum_{\ell=0}^{2^n-1} a_{k\ell}^n w_{2^n+\ell}(x) \quad (0 \le k, \ell < 2^n, x \in [0,1)).$$

A szóban forgó három rendszer kapcsolata mintául szolgál jól használható ortogonális rendszerek szerkesztésére. Nevezetesen a Rademacher-rendszer helyett egy standartizált martingál-differencia sorozatot, a Walsh-rendszer helyett a maringál-differencia sorozat szorzatrendszerét véve ortogonális rendszereknek egy tág osztályát képezhetjük. A Haar- és a Walsh-rendszer említett kapcsolata mintául szolgálhat Haar-típusú rendszerek konstrukciójához, továbbá hatékony algoritmusok szerkeszthetők a Fourier-együtthatók kiszámítására. A [9] dolgozatban racionális martingál differenciákból szerkesztettünk szorzatrendszereket és hatékony algoritmusokat a Fourier-analízisre és szintézisre. Ezekkel a konstrukciókkal az 5. fejezetben foglalkozunk részletesebben.

1.5. Waveletek

A Haar- és a Faber–Schauder-rendszer egyetlen függvényből kiindulva dilatációval és transzlációval származtatható. A Haar-függvények azonban nem folytonosak (nincsenek a $C[0,1]$-ben), azért sima függvények jó közelítésére nem alkalmasak. Ciesielski a Haar-függvények többszöri integrálásával és ortogonalizációs eljárással állított elő sima, jó approximációs tulajdonságú ortogonális rendszereket [16]. Az 1980-as évektől kezdődően *Y. Meyer, I. Daubechies* [20], [53], [54] stb. munkássága nyomán egyre többen foglalkoztak

$$\psi_{n,k}(x) = 2^{n/2}\psi(2^n x - k) \quad \big(x \in \mathbb{R}, k, n \in \mathbb{Z}, \psi \in L^2(\mathbb{R}), \|\psi\|_2 = 1\big)$$

alakú ortonormált rendszerek, ún. *waveletek* konstrukciójával. Ilyen rendszerek szerkesztése a Haar-rendszert kivéve nehéz feladat, és a konstrukcióban a ψ alapfüggvény (anyawavelet) helyett annak $\widehat{\psi}$ Fourier-transzformációjából szokás kiindulni. Annak ellenére, hogy a ψ általában nem adható meg explicit alakban, a wavelet Fourier-sorok jó konvergencia és approximációs tulajdonságokkal rendelkeznek, a sorfejtés részletösszegeinek magfüggvényei jól becsülhetők, és a wavelet Fourier-együtthatók hatékony algoritmussal számíthatók.

Az alkalmazásokban különösen a *sima, kompakt tartójú waveletek* bizonyultak hasznosnak. A két feltétel egymás ellen hat: minél rövidebb a wavelet tartója,

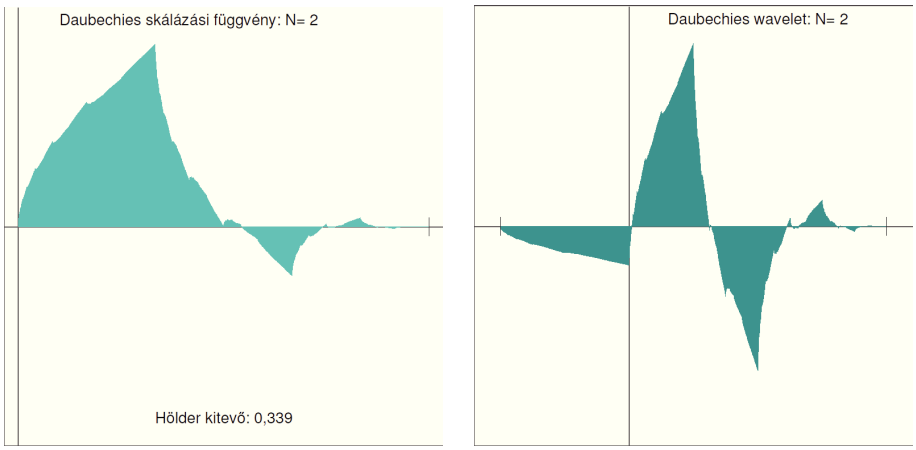
annál kisebb a simaságát jellemző Hölder-kitevő. Elterjedten használják a Daubechies által bevezetett, az $N = 2, 3, \ldots$ paramétertől függő ${}_N\psi$ waveleteket [20]. A ${}_N\psi$ tartójának hossza $2N - 1$, Hölder-kitevője nagy N esetén aszimptotikusan egyenlő $0,2075\,N$-nel. A $\psi = {}_N\psi$ ún. anyawavelet a $\varphi = {}_N\varphi$ skálázási függvényből származtatható:

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{2N-1} (-1)^{j+1} c_j \varphi(2x + 2N - j),$$

ahol a c_j együtthatók a waveletet meghatározó számok. A φ függvény kielégíti a

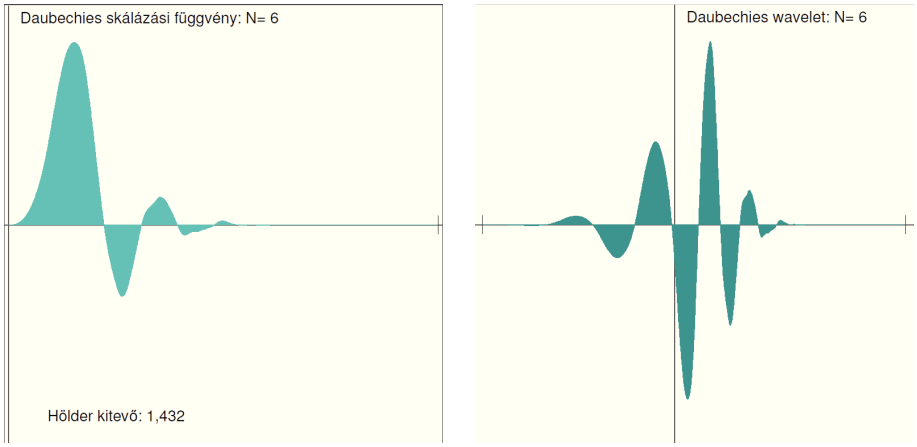
$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{2N-1} c_j \varphi(2x - j)$$

ún. skálázási egyenletet, amely alapján a φ meghatározható. Az alábbi ábrákon $N = 2$ és 6 esetén szemléltetjük a Daubechies-féle skálázási függvényt és waveletet.



A Daubechies-féle φ skálázási függvény és ψ wavelet: $N = 2$

Az ortogonális wavelet-rendszerek mellett ilyen típusú biortogonális rendszereket és Riesz-bázisokat is használnak. Ezek különösen alkalmasak jelek hatékony reprezentációjára, rekonstrukciójára és tömörítésére. Megmutatták, hogy a Franklin-rendszerhez hasonlóan az ortogonális waveletek egy tág osztálya feltétlen bázist alkot az L^p-terekben [53].



A Daubechies-féle skálázási függvény és wavelet: $N = 6$

1.6. Hardy-terek

Az alkalmazásokban az L^p-terek mellett a $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ diszken értelmezett analitikus függvények $\mathfrak{A}$ halmaza és az ezekkel összefüggő Banach-terek játszanak kitüntetett szerepet. *Riesz Frigyes* egy 1923-ban írt dolgozatában [67] az $f \in \mathfrak{A}$ függvény $0 < r < 1$ sugarú körre vonatkozó leszűkítésének véve az

$$\|f_r\|_p := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \, dt\right)^{1/p} \qquad (0 < p < \infty)$$

integrálközepeit, bevezette azoknak az $\mathfrak{A}$-beli függvényeknek az osztályát, amelyekre $\sup_{0<r<1} \|f_r\|_p < \infty$. Hivatkozva Hardynak egy 1915-ben megjelent dolgozatára [40], amelyben Hardy megmutatta, hogy $\|f_r\|_p$ az r monoton növő függvénye, Riesz a szóban forgó függvényosztályt Hardyról nevezte el és a $\mathcal{H}^p$ szimbólummal jelölte. A $\mathcal{H}^p(\mathbb{D}) := \mathcal{H}^p$ függvényosztályon az

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0<r<1} \|f_r\|_p$$

leképezés norma, ha $1 \le p \le \infty$ és kvázinorma, ha $0 < p < 1$, továbbá a $\mathcal{H}^p$ tér ezekre nézve teljes. Ismeretes, hogy $f \in \mathcal{H}^p$ $(p > 0)$ esetén m.m. $t \in \mathbb{R}$ pontban létezik az $f(e^{it}) := \lim_{r\to 1} f(re^{it})$ peremfüggvény, továbbá f a $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ peremen az $L^p(\mathbb{T})$ függvénytérhez tartozik, és $\|f\|_{H^p} = \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ [21], [35], [55], [86]. A $\mathbb{D}$ diszken analitikus és ennek lezárásán folytonos függvények osztályát *diszk algebrának nevezzük* és az $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ szimbólummal jelöljük. A Haar-rendszert a $[0, 1)$ intervallum helyett a $\mathbb{T}$-n véve, és onnan analitikusan kiterjesztve a $\mathbb{D}$-re a

$\mathcal{H}^p(\mathbb{D})$ $(1 \leq p < \infty)$ tereknek egy bázisát kapjuk. Banach a [2] monográfiában a diszk algebrát is felsorolta azok között a (szeparábilis) terek között, amelyekről nem tudták, hogy van-e bázisuk. Erre a hosszú ideig nyitott kérdésre *Bockarev* [5] adott pozitív választ, a Franklin-rendszerből kiindulva bázist szerkesztve az $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ téren. Ez a konstrukció waveletekre is átvihető [53].

1.7. Diszkrét időinvariáns rendszerek

A Hardy-tereket nemcsak a komplex függvénytanban és a Fourier-sorok elméletében használják széleskörűen, hanem az 1960 -as évek óta kiderült, hogy a Banach-tereknek ez az osztálya (elsősorban a $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ és a $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ tér) az irányításelméleti feladatok matematikai modellezésének és az operátorelméletnek is adekvát eszközei [43], [68], [79].

Az irányításelméletben a legegyszerűbb diszkrét rendszerek $T : \ell^2 \to \ell^2$ típusú korlátos, lineáris operátorokkal írhatók le:

$$y = T(u) \quad \big(u = (u_n, n \in \mathbb{N}),\ y = (y_n, n \in \mathbb{N}) \in \ell^2\big)\,.$$

Az $u, y \in \ell^2$ sorozatokat (input, output) jeleknek, az $\|u\|_2 := (\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2)^{1/2}$ normát az u jel energiájának nevezzük. Az $(u_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat n indexét diszkrét időként szokás interpretálni. Az ún. *diszkrét, kauzális, időinvariáns* (angolul: discrete linear causal and time invariant (LTI) systems) rendszerek konvolúciós operátorokkal írhatók le:

$$y = T_a u := a * u, \qquad y_n = (a * u)_n := u_n a_0 + u_{n-1} a_1 + \cdots + u_0 a_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az

$$u \to U, \qquad U(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n z^n \quad (z \in \mathbb{D})$$

leképezés izometrikus izomorfia az ℓ^2 és a $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ Hardy-tér között. A rendszert generáló a sorozatnak megfelelő

$$A(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \ (z \in \mathbb{D})$$

függvényt a T_a *rendszer átviteli függvényének* nevezzük. Az ℓ^2 és a $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ szóban forgó izometriájában az $u \to T_a u$ operátornak az átviteli függvénnyel való szorzás $U \to AU$ operátora felel meg. Ez utóbbi $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ operátor akkor és csak akkor korlátos, ha $A \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ és normája $\|A\|_{H^\infty}$, azaz

$$\|T_{\mathfrak{a}}\|_{\ell^2 \to \ell^2} = \|A\|_{H^\infty},$$

továbbá a $T_a \to A$ leképezés izomorfizmus az LTI-rendszerek osztálya és a $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ tér között [43]. Ezek alapján nyilvánvaló a Hardy-terek jelentősége a rendszerelmélet matematikai modellezésében. Innen következik, hogy ha a rendszereket generáló átviteli függvények H^∞-normában közel vannak egymáshoz, akkor ugyanazon

bemenet esetén a kimenetek is kicsit térnek el egymástól. Más szóval a szóban forgó rendszerek közelítésének problémája az átviteli függvények H^∞-normában való approximációjának kérdésére vezethető vissza. Kézenfekvő e célból a diszkalgebra valamely ortogonális bázisát és az e szerinti Fourier-sorfejtés részletösszegeit választani. A probléma nehézségét jól mutatja, hogy csak 1974-ben *Bockarjev* [5] munkásságának köszönhetően derült ki, hogy az $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ diszkalgebrában létezik ilyen bázis. A [6] dolgozatban ezt a bázist használtuk rendszerek közelítésére. Azóta többek között waveletekkel kapcsolatban is születtek approximációs eljárások a diszkalgebrán [53], [73].

A $T_a : \ell^2 \to \ell^2$ operátor unitér, más szóval a rendszerre érvényes az energiamegmaradás, ha $\|T_a u\|_{\ell^2} = \|u\|_{\ell^2}$ $(u \in \ell^2)$. Ez azzal ekvivalens, hogy az A átviteli függvényre minden $U \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ esetén $\|U\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|AU\|_{L^2(\mathbb{T})}$ teljesül. Innen következik, hogy a T_a operátor akkor és csak akkor unitér, ha az A átviteli függvényére fennáll a következő:

$$A \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}), \qquad \left|A\left(e^{it}\right)\right| = 1 \quad (m.\,m.\ t \in [0, 2\pi)). \tag{5}$$

Az (5) feltételnek eleget tevő függvényeket *belső függvényeknek* nevezzük. Ennek alapján azok az LTI-rendszerek, amelyekre érvényes az energiamegmaradás törvénye a $\mathcal{H}^\infty(D)$ belső függvényeivel írhatók le.

Könnyen verifikálható, hogy a $b \in \mathbb{D}$ és $\epsilon \in \mathbb{T}$ paramétereket tartalmazó

$$B_{\mathfrak{b}}(z) := \epsilon \frac{z - b}{1 - \bar{b}z} \quad (z \in \mathbb{C}, \mathfrak{b} = (b, \epsilon) \in \mathbb{B} := \mathbb{D} \times \mathbb{T})$$

függvények $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ és $\mathbb{T} \to \mathbb{T}$ bijekciók, következésképpen belső függvények. Ezek véges szorzatai is nyilvánvalóan belső függvények.

Az LTI-rendszereket az x_n $(n \in \mathbb{N})$ visszacsatolt jel beiktatásával gyakran az

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= px_n + qu_n \\ y_n &= rx_n + su_n \quad (x_0 = 0,\ n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{6}$$

rekurzióval írják le, ahol $p,\ q,\ r,\ s$ a rendszer paraméterei. Egyszerű számolással adódik, hogy a (6) rendszer átviteli függvénye $p = \bar{b},\ q = \epsilon(1-|b|^2),\ r = 1,\ s = -\epsilon b$ esetén a $B_{\mathfrak{b}}$ Blaschke-függvény.

Blaschke a [4] dolgozatában megmutatta, hogy ha a $b_n \in \mathbb{D}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra teljesül az azóta róla elnevezett

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - |b_n|) < \infty$$

feltétel, akkor az $\epsilon_n := -\bar{b}_n/|b_n|$ $(b_n \neq 0)$, $\epsilon_n = 1$ $(b_n = 0)$ választás esetén a

$$B(z) := \prod_{n=0}^{\infty} B_{\mathfrak{b}_n}(z) \quad (z \in \mathbb{D})$$

végtelen szorzat a $\mathbb{D}$ minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens és $B \in \mathcal{H}^\infty$ belső függvény. A $B_{\mathfrak{b}}$-t*Blaschke-függvénynek*, a B-t *Blaschke-szorzatnak* nevezzük.

A $b \in \mathbb{D}$ szám a $B_{\mathfrak{b}}$ függvény zérushelye, a $b^* := 1/\overline{b}$ szám, a b egyégkörre vonatkozó inverzképe (tükörképe), a $B_{\mathfrak{b}}$ függvény pólusa. Innen következik, hogy a B Blaschke-szorzatnak pontosan a b_n számok a gyökei, méghozzá azzal a multiplicitással, ahányszor a $(b_k, k \in \mathbb{N})$ sorozatban előfordulnak. Megfordítva, ismeretes [76], hogy bármely $f \in \mathcal{H}^p(\mathbb{D})$ $(p > 0)$ függvény zérushelyei kielégítik a Blaschke-féle feltételt. Az ezekkel szerkesztett B Blaschke-szorzat tartalmazza az f zérushelyeit, és ezzel az f felírható $f = Bg$ alakban, ahol a $g \in \mathcal{H}^p(\mathbb{D})$ függvény nem tűnik el a $\mathbb{D}$-n és $\|f\|_{H^p} = \|g\|_{H^p}$. Ez a felbontás egy 1 abszolút értékű faktortól eltekintve egyértelmű [67]. A további részleteket illetően Móricz Ferenc [55] kitűnő magyar nyelvű tankönyvére utalunk.

1.8. Malmquist–Takenaka-rendszerek

A Blaschke-függvényeket felhasználva 1925-ben *Malmquist* [52] és *Takenaka* [81] egymástól függetlenül bevezették racionális függvényekből álló ortogonális rendszereknek egy igen tág osztályát a $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ téren. Ezeket azóta *Malmquist–Takenaka* (MT)-rendszereknek nevezzük. Ezek a rendszerek tetszőleges $b_n \in \mathbb{D}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozattal generálhatók és felírhatók a következő explicit alakban:

$$\Phi_n(z) := \frac{\sqrt{1-|b_n|^2}}{1-\overline{b}_n z} \prod_{k=0}^{n-1} B_{b_k}(z) \qquad \left(z \in \overline{\mathbb{D}} := \mathbb{D} \cup \mathbb{T}, B_{b_k} := B_{(b_k,1)}, k \in \mathbb{N}\right).$$

Ismeretes, hogy a Blaschke-féle feltétel ellentettje (amit az irodalomban *Szász-féle feltételnek* is neveznek [68]) szükséges és elégséges ahhoz, hogy az MT-rendszer teljes legyen a $\mathcal{H}^p(\mathbb{D})$ $(1 \le p < \infty)$ Hardy-terekben és a diszkalgebrán. Megjegyezzük, hogy a hatványfüggvények (a trigonometrikus függvények a $\mathbb{T}$-n) az MT-rendszerből az $b_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ választással kaphatók. Míg a fizikai alkalmazásokban használt klasszikus ortogonális rendszerek [77] (a Jacobi-, Csebisev-, Laguerre- stb. rendszerek) legfeljebb egy-két paramétert tartalmaznak, addig az MT-rendszerekben végtelen sok paramétert választhatunk meg szabadon. Ez lehetővé teszi, hogy az adott feladathoz (rendszerhez) bizonyos szempontok szerint optimális paramétereket válasszunk. A rendszerelmélettel foglalkozók az 1960-as évektől kezdődően felismerték annak az előnyét, hogy a trigonometrikus rendszer helyett az egy vagy két paramétert tartalmazó speciális MT-rendszereket használják. A $b_n := b, n \in \mathbb{N}$ konstans sorozatnak megfelelő

$$L_n^b(z) := \frac{\sqrt{1-|b|^2}}{1-\overline{b}z} B_b^n(z) \quad \left(z \in \overline{\mathbb{D}}, n \in \mathbb{N}\right)$$

MT-rendszert *diszkrét Laguerre-rendszernek* nevezik. Az elnevezést az indokolja, hogy a $[0, \infty)$ intervallumon értelmezett, az elméleti fizikában fontos szerepet

játszó Laguerre-függvények a diszkrét Laguerre-rendszerből Fourier-transzformációval származtathatók. A $b_{2n} = b$, $b_{2n+1} = \overline{b}$ $(n \in \mathbb{N})$ speciális MT-rendszert *Kautz* vezette be LTI-rendszerek reprezentációjára. Az MT-rendszerek irányításelméleti alkalmazásairól a [43] könyvben kaphatunk részletes áttekintést. Az MT-sorfejtések diszkretizációjával és ezek alkalmazásaival (többek között az EKG-görbék egyszerű reprezentációjával) az 5. fejezetben foglalkozunk.

1.9. Martingál Hardy-terek

A Hardy-tér fogalmának martingálokra való kiterjesztése mind a valószínűségelméletben, mind a Fourier-analízisben igen hasznos eszköznek bizonyult. Ezekről Weisz Ferenc [84], [85] monográfiáiból kaphatunk jó áttekintést. A $H^p[0,1]$ $(1 \le p < \infty)$ *diadikus Hardy-tér* normáját az $f^* := \sup_n |E_n f|$ diadikus maximálfüggvény L^p-normájával definiáljuk: $\|f\|_{H^p[0,1]} := \|f^*\|_{L^p[0,1]}$ $(1 \le p < \infty)$. Ismeretes, hogy a klasszikus Hardy-terekhez hasonlóan $H^p[0,1] = L^p[0,1]$, ha $1 < p < \infty$ és $H^1[0,1] \subset L^1[0,1]$ valódi altér. A Haar-rendszer bázis a $H^1[0,1]$ diadikus Hardy-térben, a Franklin-rendszer bázis a $\mathcal{H}^1(\mathbb{T})$ Hardy-térben és a két bázis egymással ekvivalens. Ezeket a bázisokat felhasználva egy lineáris homeomorfizmust értelmezhetünk a két tér között. A két Hardy-tér további kapcsolatát illetően lásd még a [74] könyvet.

2. A Blaschke-csoport és a hiperbolikus geometria

A Blaschke-függvények nemcsak Hardy-térbeli függvények faktorizációjában játszanak fontos szerepet, hanem jól használhatók a hiperbolikus geometria modellezésére is.

2.1. Möbius- és Blaschke-transzformációk

Jelölje $\mathfrak{M}$ a Möbius-transzformációk (a lineáris törtfüggvények) csoportját, $SL(2) := \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \det A = 1\}$ a komplex kétdimenziós speciális lineáris csoportot. Az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to r_A(z) := \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}} \qquad \left(z \in \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$$

$SL(2) \to \mathfrak{M}$ leképezés csoport homomorfizmus: $r_{A_1A_2} = r_{A_1} \circ r_{A_2}$, ahol $\circ$ a függvénykompozíció műveletét jelöli. Az unitér mátrixok $SU(2)$ osztálya az $SL(2)$-nek egy részcsoportját alkotják. Minden $A \in SU(2)$ mátrix

$$A = \begin{pmatrix} p & -q \\ \overline{q} & \overline{p} \end{pmatrix}, \qquad \det A = |p|^2 + |q|^2 = 1 \quad (p, q \in \mathbb{C})$$

alakú, továbbá a $Q_E(x) := |x_1|^2 + |x_2|^2$ $(x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2)$ (pozitív definit) kvadratikus alak invariáns az $SU(2)$-beli transzformációkkal szemben:

$$Q_E(Ax) = Q_E(x) \quad (x \in \mathbb{C}^2,\ A \in SU(2)).$$

A továbbiakban az $SL(2)$ csoport

$$B = \begin{pmatrix} p & -q \\ -\overline{q} & \overline{p} \end{pmatrix}, \quad \det B = |p|^2 - |q|^2 = 1 \quad (p, q \in \mathbb{C})$$

alakú mátrixaiból alkotott részcsoportja játszik fontos szerepet. A

$$Q_H(x) := |x_1|^2 - |x_2|^2 \ (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2)$$

hiperbolikus kvadratikus alak ezekkel a transzformációkkal szemben invariáns: $Q_H(Bx) = Q_H(x)$. Ezzel összhangban a szóban forgó részcsoportot $SH(2)$-vel (másutt a szakirodalomban $SU(1,1)$-gyel) szokás jelölni [83]. A $B \to r_B$ homomorfizmus az $SH(2)$ elemeit a Blaschke-függvényekbe viszi át:

$$r_B(z) := \frac{pz - q}{\overline{q}z + \overline{p}} = \frac{p}{\overline{p}} \frac{z - q/p}{1 - z\overline{q}/\overline{p}} = \epsilon \frac{z - b}{1 - \overline{b}z} =: B_{\mathfrak{b}}(z) \quad (z \in \mathbb{C})$$
$$\left(b := q/p \in \mathbb{D},\ \epsilon := \frac{p}{\overline{p}} \in \mathbb{T} \right),$$

következésképpen a Blaschke-függvények $\mathfrak{B}$ osztálya az $\mathfrak{M}$ Möbiusz-transzformációk egy részcsoportját alkotják. A $(\mathfrak{B}, \circ)$ csoportot *Blaschke-féle csoportnak* nevezzük. Az

$$1 - |B_{\mathfrak{b}}(z)|^2 = \frac{\left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |b|^2\right)}{\left|1 - \overline{b}z\right|^2} \qquad \left(z \in \overline{\mathbb{D}}, \mathfrak{b} = (b, \epsilon) \in \mathbb{B} := \mathbb{D} \times \mathbb{T}\right)$$

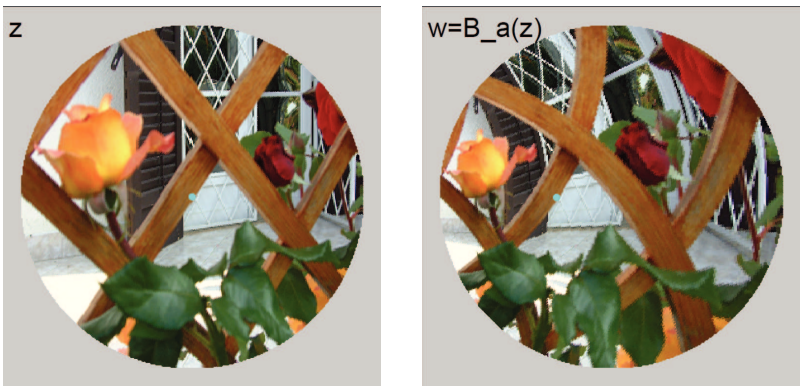
azonosságból (lásd [41]) következik, hogy $\mathfrak{b} \in \mathbb{B}$ esetén $B_{\mathfrak{b}} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, ill. $B_{\mathfrak{b}} : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ bijekciók, továbbá $B_{\mathfrak{e}}$ $(\mathfrak{e} := (0, 1))$ a $\mathfrak{B}$ egységeleme (az identikus leképezés) és $B_{\mathfrak{b}^{-1}}$ $(\mathfrak{b}^{-1} := (-b\epsilon, \overline{\epsilon}))$ a $B_{\mathfrak{b}}$ leképezés inverze (inverz függvénye). A

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{I}} := \{B_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{b} = (s, 1), s \in (-1, 1)\}, \quad \mathfrak{B}_{\mathbb{T}} := \{B_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{b} = (0, \epsilon), \epsilon \in \mathbb{T}\}$$

halmazok a Blaschke-csoport egyparaméteres részcsoportjai, amelyek

$$B_{\mathfrak{b}} = B_{(0, e^{i(\varphi+\theta)})} \circ B_{(r,1)} \circ B_{(0, e^{-i\varphi})} \qquad \left(\mathfrak{b} := (re^{i\varphi}, e^{i\theta}) \in \mathbb{B}\right)$$

alapján generálják a Blaschke csoportot: $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{\mathbb{T}} \circ \mathfrak{B}_{\mathbb{I}} \circ \mathfrak{B}_{\mathbb{T}}$. A $\mathfrak{B}_{\mathbb{I}}$-hez tartozó függvények az $\mathbb{I} := \{z \in \mathbb{D} : -1 < \Re z < 1, \Im z = 0\}$ halmazt önmagára képezik és az 1 és -1 pontokat helyben hagyják.



A Blaschke-leképezés

A $\mathbb{D}$ diszk a

$$\rho(z_1, z_2) := \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z}_2|} = |B_{z_2}(z_1)| \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D})$$

ún. *pszeudohiperbolikus metrikával* teljes metrikus teret alkot, és ez a metrika invariáns a Blaschke-leképezésekkel szemben:

$$\rho(B_{\mathfrak{b}}(z_1), B_{\mathfrak{b}}(z_2)) = \rho(z_1, z_2) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}, \mathfrak{b} \in \mathbb{B}). \tag{7}$$

Ez a

$$\frac{B_{\mathfrak{b}}(z_1) - B_{\mathfrak{b}}(z_2)}{1 - B_{\mathfrak{b}}(z_1)\overline{B}_{\mathfrak{b}}(z_2)} = \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z}_2}\frac{1 - b\overline{z}_2}{1 - \overline{b}z_2} \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}, \mathfrak{b} = (b, \epsilon) \in \mathbb{B})$$

azonosság következménye [22], [41]. A (7) tulajdonság jellemzi a Blaschke-függvényeket. Nevezetesen, a Schwarz–Pick-lemma szerint minden $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$, $\|f\|_\infty \leq 1$ függvényre $\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2)$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{D})$, és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha f Blaschke-függvény [22].

A $\mathfrak{b} \to B_{\mathfrak{b}}$ leképezés egy csoportstrukturát indukál a $\mathbb{B}$ paraméter tartományban, továbbá

$$\mathfrak{z} \circ \mathfrak{b} = (B_{\mathfrak{b}^{-1}}(z), \zeta\eta_{\mathfrak{b}^{-1}}(z)) \quad (\eta_{\mathfrak{b}}(z) := \overline{\epsilon}\frac{1 - z\overline{b}}{1 - \overline{z}b}, \qquad \mathfrak{b} = (b, \epsilon), \mathfrak{z} = (z, \zeta) \in \mathbb{B}).$$

Innen nyilvánvaló, hogy a $(\mathfrak{z}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{z} \circ \mathfrak{b}^{-1}$ csoportművelet folytonos a $\mathbb{B}$ tér $\varrho_2(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) := |b_1 - b_2| + |1 - \epsilon_1\overline{\epsilon}_2|$ $(\mathfrak{b}_j = (b_j, \epsilon_j) \in \mathbb{B})$ (euklideszi) metrikájában, következésképpen $(\mathbb{B}, \circ)$ lokálisan kompakt, folytonos csoport.

A $B_{\mathfrak{b}} : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ $(\mathfrak{b} = (re^{i\theta}, e^{i\varphi}) \in \mathbb{B})$ bijekció a $\mathbb{T}$ peremen felírható

$$B_{\mathfrak{b}}\left(e^{it}\right) = e^{i\beta_{\mathfrak{b}}(t)}, \beta_{\mathfrak{b}}(t) := \varphi + \theta + \gamma_r(t - \theta) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{8}$$

alakban, ahol a γ_r függvény a Poisson-féle magfüggvény integrálfüggvénye [63]:

$$\gamma_r(t) = \int_0^t P_r(\tau)\,d\tau = 2\arctan(c(r)\tan t/2) \qquad (9)$$
$$(c(r) := (1+r)/(1-r), r \in [0,1), t \in \mathbb{R}).$$

2.2. Hiperbolikus geometria

A Blaschke-csoport azonosítható a *Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria Poincaré-féle (PK) körmodelljében* az egybevágósági transzformációk csoportjával. A modell egyenesei a $\mathbb{I}$ intervallum Blaschke-függvények által létesített képei: $l_{\mathfrak{b}} := \{B_{\mathfrak{b}}(\mathbb{I}) : \mathfrak{b} \in \mathbb{B}\}$. Ezek egybeesnek a $\mathbb{T}$-t merőlegesen metsző körök és egyenesek $\mathbb{D}$-be eső íveivel, ill. szakaszaival. A $B_{\mathfrak{b}}(1),\ B_{\mathfrak{b}}(-1) \in \mathbb{T}$ pontokat az $l_{\mathfrak{b}}$ egyenes végtelen távoli pontjainak, az $I := [s_1, s_2] \subset \mathbb{I}$ intervallumok $B_{\mathfrak{b}}(I)$ képeit (hiperbolikus) szakaszoknak nevezzük. Könnyen igazolható, hogy $l_{\mathfrak{b}_1} = l_{\mathfrak{b}_2}$ akkor és csak akkor, ha valamely $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{I}}$ függvényre $B_{\mathfrak{b}_1} = B_{\mathfrak{b}_2} \circ B$ teljesül, következésképpen a PK egyeneseinek osztálya azonosítható a $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}_{\mathbb{I}}$ jobb oldali mellékosztályokkal. A ρ mellett a

$$\rho^*(z_1, z_2) := \operatorname{arth}\rho(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho(z_1,z_2)}{1-\rho(z_1,z_2)}\right) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D})$$

hiperbolikus metrika játszik kitüntetett szerepet. Bebizonyítható, hogy a ρ^*-ra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségben a $\rho^*(z_1,z_2) = \rho^*(z_1,z_3)+\rho^*(z_3,z_2)$ egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha z_3 a z_1, z_2 hiperbolikus szakaszon van.

A Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriának több egymással ekvivalens modellje ismert [19]. A *Poincaré-féle félsík (PS) modell* a körmodellből a

$$\Upsilon(z) := \frac{i-z}{i+z} \quad \left(z \in \overline{\mathbb{C}}\right)$$

Caley-féle transzformációval származtatható. A szóban forgó bijekció a $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ félsíkot a $\mathbb{D}$-re, az $\mathbb{R}$-et a $\mathbb{T} \setminus \{-i\}$ halmazra képezi és $\Upsilon(t) = e^{2i\arctan t} \in \mathbb{T}\ \ (t \in \mathbb{R})$. A Blaschke-függvényeknek a

$$B^{\diamond}_{\mathfrak{b}}(z) := B_{\mathfrak{b}}(\Upsilon(z)) = \epsilon^{\diamond}\frac{z-b^{\diamond}}{z-\overline{b^{\diamond}}} \quad \left(z \in \overline{\mathbb{C}}, b^{\diamond} := \Upsilon^{-1}(b), \epsilon^{\diamond} = -\epsilon\frac{1+b}{1+\overline{b}}\right)$$

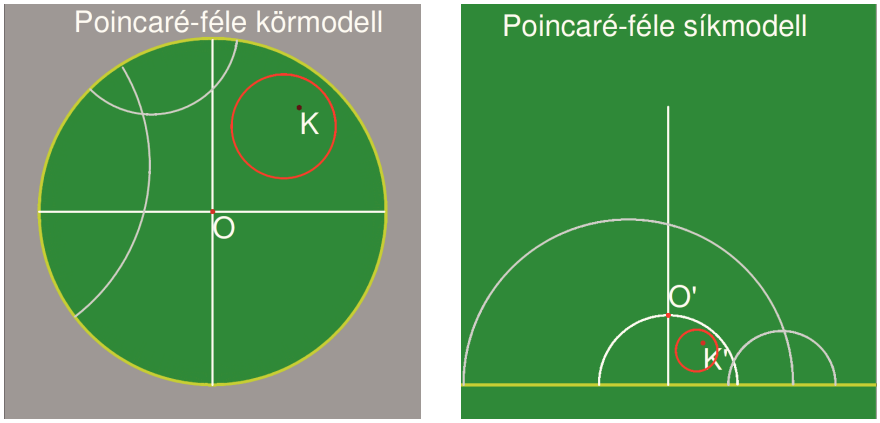
függvények felelnek meg a félsíkon. A félsík modell egyenesei a $\{\Upsilon^{-1}(l_{\mathfrak{b}}) : b \in \mathbb{B}\}$ alakzatok, a valós tengelyt merőlegesen metsző $\mathbb{C}_+$-ba eső körívek, ill. félegyenesek, az egybevágósági transzformációk a $\Upsilon^{-1} \circ B_{\mathfrak{b}} \circ \Upsilon$ $(\mathfrak{b} \in \mathbb{B})$ leképezésekkel írhatók le.

A Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria *Cayley–Klein-féle (CK) modelljében* az egyenesek az euklideszi egyenesek $\mathbb{D}$-be eső szakaszaival egyenlők. Ezek a Poincaré-modell egyeneseiből egyszerűen származtathatók az $l_{\mathfrak{b}}$ hiperbolikus egyenesnek

megfeleltetve a végtelen távoli pontjait összekötő $\bar{l}_{\mathfrak{b}}$ euklideszi szakaszt. Ez a megfeleltetés leírható a

$$\iota(z) := \frac{2z}{1+|z|^2} \qquad \big(z \in \overline{\mathbb{D}}\big)$$

függvénnyel. Nevezetesen egyszerűen igazolható, hogy $\iota : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ bijekció, amelynek inverze $\iota^{-1}(z) = z/(1+\sqrt{1-|z|^2})$ $(z \in \mathbb{D})$, $\iota(z) = z$ $(z \in \mathbb{T})$, továbbá ι a PK-modell egyeneseit a CK-modell egyeneseibe viszi át, ui. $\iota : l_{\mathfrak{b}} \to \bar{l}_{\mathfrak{b}}$ bijekció. Az Υ és az ι leképezések egy-egy pszeudohiperbolikus, ill. hiperbolikus metrikát indukálnak a PS-, ill. CK-modellen. Az alábbi ábrákon a Poincaré-féle kör- és sík modellben négy-négy egymásnak megfelelő hiperbolikus egyenest szemléltettünk. Piros színnel egy-egy K, ill. K' középpontú hiperbolikus kört rajzoltunk fel.



A Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria modelljei

3. Wavelet-, Gábor- és voice-transzformáció

A wavelet-transzformáció folytonos változatának értelmezéséhez, kiindulva egy $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ alapfüggvényből, az ún. *anyawaveletből*, dilatációt és transzlációt alkalmazva vezessük be a

$$\psi_{pq}(x) = \frac{\psi((x-q)/p)}{\sqrt{p}} \qquad (x \in \mathbb{R},\ (p,q) \in \mathbb{L} := (0,\infty) \times \mathbb{R})$$

függvénycsaládot. Ezzel a magfüggvénnyel képzett

$$(\mathcal{W}_\psi f)(p,q) := \frac{1}{\sqrt{p}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi}((x-q)/p)\,dx = \langle f, \psi_{pq} \rangle \qquad \big((p,q) \in \mathbb{L},\ f \in L^2(\mathbb{R})\big)$$

integráloperátort *wavelet-transzformációnak* nevezzük. Ismeretes, hogy a ψ-re vonatkozó elég általános feltételek mellett az f függvény rekonstruálható a wavelet-transzformáltjából és érvényes rá az energiamegmaradást jelentő Plancherel-formula megfelelője.

A $\mathcal{W}_\psi$ transzformációra, a trigonometrikus Fourier-transzformációhoz hasonlóan, csoportelméleti interpretáció adható, kiindulva az $\mathbb{R}$ számegyenes

$$\ell_{\mathfrak{a}}(x) := px + q \quad (x \in \mathbb{R},\ \mathfrak{a} = (p,q) \in \mathbb{L})$$

affin leképezéseinek $\mathfrak{L}$ osztályából [70]. Az $\mathfrak{L}$ függvénycsalád zárt a $\circ$ függvénykompozíció műveletére nézve, tartalmazza az $\mathfrak{e} := (1,0)$-nak megfelelő $\ell_{\mathfrak{e}}$ identikus leképezést, továbbá az $\mathfrak{a}^{-1} := (p^{-1}, -qp^{-1}) \in \mathbb{L}$ elemnek megfelelő $\mathfrak{L}$-beli függvény az $\ell_{\mathfrak{a}}$ inverz függvénye: $\ell_{\mathfrak{a}^{-1}} = \ell_{\mathfrak{a}}^{-1}$. Az $(\mathfrak{L}, \circ)$ csoportot *affin csoportnak* nevezzük. Az $\mathbb{L}$ halmazon bevezetve az

$$\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_1 \circ \mathfrak{a}_2 := (p_1p_2, q_1 + p_1q_2) \quad (\mathfrak{a}_j := (p_j, q_j) \in \mathbb{L}, j = 1,2)$$

csoportműveletet egy, az affin csoporttal izomorf $(\mathbb{L}, \circ)$ csoportot kapunk, továbbá $\ell_{\mathfrak{a}} = \ell_{\mathfrak{a}_1} \circ \ell_{\mathfrak{a}_2}$. Az $\mathbb{L}$ tér szokásos topológiájában a csoportműveletek folytonosak, következésképpen $(\mathbb{L}, \circ)$ egy (nemkommutatív, lokálisan kompakt) topologikus csoport.

A wavelet-transzformáció leírható a

$$W_{\mathfrak{a}}\psi := \frac{1}{\sqrt{p}}\psi \circ \ell_{\mathfrak{a}}^{-1} \quad \big(\mathfrak{a} = (p,q) \in \mathbb{L},\ \psi \in L^2(\mathbb{R})\big)$$

operátorsereggel:

$$(\mathcal{W}_\psi f)(\mathfrak{a}) = \langle f, W_{\mathfrak{a}}\psi\rangle \quad \big(\mathfrak{a} = (p,q) \in \mathbb{L},\ f, \psi \in L^2(\mathbb{R})\big)\,. \tag{10}$$

Egyszerűen verifikálható, hogy a $W_{\mathfrak{a}} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ $(\mathfrak{a} \in \mathbb{L})$ operátorsereg az $(\mathbb{L}, \circ)$ csoport egy *unitér reprezentációja* az $L^2(\mathbb{R})$ téren, azaz

$$i)\quad \|W_{\mathfrak{a}}\psi\| = \|\psi\|, \qquad ii)\quad W_{\mathfrak{a}_1}(W_{\mathfrak{a}_1}\psi) = W_{\mathfrak{a}_1\circ\mathfrak{a}_2}\psi \quad \big(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in \mathbb{L},\ \psi \in L^2(\mathbb{R})\big)\,,$$

továbbá a reprezentáció folytonos a következő értelemben: minden $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ függvényre

$$iii)\quad \|W_{\mathfrak{a}_n}\psi - W_{\mathfrak{a}}\psi\| \to 0, \quad \text{ha} \quad \mathfrak{a}_n \to \mathfrak{a} \ \ (n \to \infty).$$

Az $(\mathbb{L}, \circ)$ helyett ennek az $(\mathbb{L}_0, \circ), \mathbb{L}_0 := \{(2^{-n}, k2^{-n}) : k, n \in \mathbb{Z}\}$ diszkrét részcsoportját véve a Haar–Fourier-együttható általánosításaként a wavelet-transzformáció

$$(\mathcal{W}_\psi f)\left(2^{-n}, k2^{-n}\right) = \sqrt{2^n}\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi}\left(2^n x - k\right)\,dx \quad (k, n \in \mathbb{Z})$$

diszkrét változatát kapjuk. Utalva az affin csoporttal való kapcsolatra a $\mathcal{W}_\psi$ leképezést *affin wavelet-transzformációnak* is szokás nevezni.

Ez a modell mintául szolgálhat hasznos függvénytranszformációk szerkesztéséhez. Az affin csoport helyett egy $(\mathbb{G}, \dot{)}$ lokálisan kompakt topológikus csoportot és annak egy $V_g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ $(g \in \mathbb{G})$ unitér reprezentációját véve a (10)-hez hasonlóan értelmezett

$$(\mathcal{V}_\psi f)(g) := \langle f, V_g \psi \rangle \quad (g \in \mathbb{G}, f, \psi \in \mathcal{H}) \tag{11}$$

leképezés korlátos lineáris operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-térről a $\mathbb{G}$-n értelmezett folytonos, korlátos függvények $C(\mathbb{G})$ terére. A $\mathcal{V}_\psi$ leképezést *Feichtinger* és *Gröchenig* nyomán a $(V_g, g \in \mathbb{G})$ reprezentáció által generált *voice-transzformációnak* nevezzük [27], [28]. Akkor mondjuk, hogy a szóban forgó reprezentáció *irreducibilis,* ha nincs valódi zárt invariáns altere, azaz bármely $\psi \in \mathcal{H}, \psi \neq \theta$ elemre $V_g \psi$ $(g \in \mathbb{G})$ zárt rendszer a $\mathcal{H}$ térben. Bebizonyítható, hogy *irreducibilis reprezentáció esetén a voice-transzformáció injektív* [42]. Jelölje m a $\mathbb{G}$ csoport egy balinvariáns Haar-mértékét és $L^2_m(\mathbb{G})$ az m mérték által generált Hilbert-teret a $\mathbb{G}$ csoporton. Azokat a $\psi \in \mathcal{H}$ elemeket, amelyekre $\mathcal{V}_\psi(\mathcal{H}) \subset L^2_m(\mathbb{G})$ teljesül, *megengedett elemeknek* nevezzük. A megengedett elemek $\mathcal{H}_0$ halmaza sűrű a $\mathcal{H}$ térben, továbbá $\psi \in \mathcal{H}_0, \psi \neq \theta$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{V}_\psi \psi \in L^2_m(\mathbb{G})$. Bebizonyítható, hogy van olyan $C : \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0 \to \mathbb{R}_+$ pozitív definit kvadratikus alak, amelyre

$$\langle \mathcal{V}_{\psi_1} f_1, \mathcal{V}_{\psi_2} f_2 \rangle_{L^2_m(\mathbb{G})} = C(\psi_1, \psi_2) \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{H}} \quad (f_1, f_2 \in \mathcal{H}, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_0)$$

teljesül [36]. Ez a Plancherel-tétel voice-transzformáltra vonatkozó analogonjának tekinthető. Speciálisan, ha a $\mathbb{G}$ csoport unimoduláris, azaz minden balinvariáns mérték egyben jobbinvariáns is, akkor egy C_1 abszolút konstanssal fennáll a

$$\|\mathcal{V}_\psi f\|_{L^2_m(\mathbb{G})} = C_1 \|\psi\|_{\mathcal{H}} \|f\|_{\mathcal{H}} \quad (f \in \mathcal{H}, f \in \mathcal{H}_0)$$

egyenlőség, következésképpen $\|\psi\|_{\mathcal{H}} = 1/C_1$ választás esetén a voice-transzformáció unitér [42]. Ez nemcsak azt jelenti, hogy igen általános feltételek mellett érvényes a Plancherel-tétel megfelelője, hanem ezzel minden konkrét esetben a formula speciális alakjára is magyarázatot kapunk, megvilágítva a $\mathbb{G}$ csoport szerepét.

A *Gábor Dénes* által 1946-ban bevezetett transzformáció is speciális voice-transzformációként származtatható, kiindulva a *Heisenberg-féle csoport* egy speciális reprezentációjából. Erre utalva a szóban forgó leképezésre a *Gábor-transzformáció* mellett a *Weyl–Heisenberg wavelet-transzformáció* elnevezés is használatos. Az affin- és a Heisenberg-csoport esetén felírva a Haar-mértéket, jellemezhetők a megengedett függvények és explicit alakban megadhatók a Plancherel-formula megfelelői [42].

4. Hiperbolikus waveletek

A hiperbolikus geometria Poincaré-féle modelljében az egybevágósági transzformációk a $(\mathfrak{B}, \circ)$ Blaschke-féle csoporttal írhatók le. Az (affin) wavelet-transz-

formáció mintájára a Blaschke-csoport unitér reprezentációival értelmezett voice-transzformációkat *hiperbolikus wavelet-transzformációknak* nevezzük. A Blaschke-leképezések bijekciók mind a diszken, mind a tóruszon. A $\mathfrak{B}_0 := \{B_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{b} \in \mathbb{B}_0\}$, $\mathbb{B}_0 := \{(r,1) \in \mathbb{B} : r \in \mathbb{I} := (-1,1)\}$ részcsoport elemei bijekciók az $\mathbb{I}$ intervallumon. Jelöljük I-vel a $\mathbb{D}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{T}$ halmazok bármelyikét és λ_I-vel a Lebesgue-mértéket az I halmazon. Legyen továbbá $\mathbb{B}_I = \mathbb{B}$, ha $I \in \{\mathbb{D}, \mathbb{T}\}$ és $\mathbb{B}_I = \mathbb{B}_0$, ha $I = \mathbb{I}$. Ekkor a B_b ($\mathfrak{b} \in \mathbb{B}_I$) leképezések bijekciók az I halmazon.

Az unitér reprezentáció értelmezéséhez felhasználjuk az $L^2_{\lambda_I}(I)$ Hilbert-teret és bevezetjük a

$$V^{[s]}_{\mathfrak{b}} f := [B'_{\mathfrak{b}^{-1}}]^{s/2}\ f \circ B_{\mathfrak{b}^{-1}} \quad \left(f \in L^2_{\lambda_I}(I),\ \mathfrak{b} \in \mathbb{B}_I,\ s \in \mathbb{R}\right) \tag{12}$$

leképezéseket, ahol B' a B függvény deriváltját jelöli [62], [63], [64], [70]. Megmutatjuk, hogy a $V^{[s]}_{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b} \in \mathbb{B}_I$) leképezések homomorfizmusok. Valóban, a fenti definíció és a közvetett függvény differenciálási szabálya alapján

$$\begin{aligned} V^{[s]}_{\mathfrak{b}_1 \circ \mathfrak{b}_2} f &= \left[\left(B_{\mathfrak{b}_2^{-1}} \circ B_{\mathfrak{b}_1^{-1}}\right)'\right]^{s/2}\ f \circ \left(B_{\mathfrak{b}_2^{-1}} \circ B_{\mathfrak{b}_1^{-1}}\right) = \\ &= \left[\left(B'_{\mathfrak{b}_2^{-1}} \circ B_{\mathfrak{b}_1^{-1}}\right)\right]^{s/2} \left[B'_{\mathfrak{b}_1^{-1}}\right]^{s/2} \left(f \circ B_{\mathfrak{b}_2^{-1}}\right) \circ B_{\mathfrak{b}_1^{-1}} = \\ &= \left[B'_{\mathfrak{b}_1^{-1}}\right]^{s/2} \left(\left[\left(B'_{\mathfrak{b}_2^{-1}}\right)^{s/2}\ f \circ B_{\mathfrak{b}_2^{-1}}\right]\right) \circ B_{\mathfrak{b}_1^{-1}} = V^{[s]}_{\mathfrak{b}_1}\left(V^{[s]}_{\mathfrak{b}_2} f\right). \end{aligned}$$

Legyen $s(I)$ az I halmaz dimenziója, azaz $s(I) = 1$, ha $I \in \{\mathbb{I}, \mathbb{T}\}$ és $s(I) = 2$, ha $I = \mathbb{D}$. Megmutatjuk, hogy $V^{[s(I)]}_{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b} \in \mathbb{B}_I$) unitér operátor a $H = L^2_{\lambda_I}(I)$ Hilbert-téren. Valóban az I halmazon a $w = B_{\mathfrak{b}}(z)$ helyettesítést alkalmazva és a $d\lambda_I(w) = |B'_{\mathfrak{b}}(z)|^{s(I)}\, d\lambda_I(z)$ transzformációs formula, valamint a $B'_{\mathfrak{b}^{-1}}(B_{\mathfrak{b}}(z))B'_{\mathfrak{b}}(z) = 1$ ($z \in I$) azonosság alapján

$$\begin{aligned} \left\|V^{[s(I)]}_{\mathfrak{b}} f\right\|^2_H &= \int_I |B'_{\mathfrak{b}^{-1}}(w)|^{s(I)} |f(B_{\mathfrak{b}^{-1}}(w))|^2\, d\lambda_I(w) = \\ &= \int_I |B'_{\mathfrak{b}^{-1}}(B_{\mathfrak{b}}(z))|^{s(I)} |f(B_{\mathfrak{b}^{-1}}(B_{\mathfrak{b}}(z)))|^2 |B'_{\mathfrak{b}}(z)|^{s(I)}\, d\lambda_I(z) = \\ &= \int_I |f(z)|^2\, d\lambda_I(z) = \|f\|^2_H. \end{aligned}$$

Az I halmaz analitikus függvényeiből álló $\mathcal{H}^2(I) := L^2_{\lambda_I}(I) \cap \mathfrak{A}$ tér a $L^2_{\lambda_I}(I)$ Hilbert-tér zárt altere, amely $I = \mathbb{T}$ esetén a $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})$ Hardy-térrel, $I = \mathbb{D}$ esetén a $\mathcal{B}^2(\mathbb{D})$ Bergman-térrel egyenlő. Innen következik, hogy a szóban forgó reprezentációk a $\mathcal{H}^2(I)$ tér bármely ortogonális bázisát ortogonális bázisba viszik át. Speciálisan $I \in \{\mathbb{D}, \mathbb{T}\}$ esetén az $e_n(z) = z^n$ ($z \in I, n \in \mathbb{N}$) ortogonális bázisból az

$$L^b_n(z) := \left(V^{[s(I)]}_{\mathfrak{b}} e_n\right)(z) = \left(\frac{\sqrt{1-|b|^2}}{1-\bar{b}z}\right)^{s(I)} B^n_{\mathfrak{b}}(z) \quad (\mathfrak{b} = (b,1) \in \mathbb{B}_I, z \in I, n \in \mathbb{N})$$

diszkrét Laguerre-rendszert kapjuk a Hardy-, ill. a Bergman-téren. Az $L^2(\mathbb{I})$ tér Legendre-bázisára alkalmazva a szóban forgó transzformációkat a $b \in \mathbb{I}$ paramétertől függő, racionális függvényekből álló ortonormált rendszereknek egy egyparaméteres osztálya származtatható.

A (12) unitér reprezentáció által generált

$$(\mathcal{V}_\psi f)(\mathfrak{b}) := \left\langle f, V_{\mathfrak{b}}^{[s(I)]}\psi \right\rangle_I \quad \left(f, \psi \in L^2_{\lambda_I}(I)\right) \tag{13}$$

voice-transzformációt *hiperbolikus wavelet-transzformációnak,* a $V_{\mathfrak{b}}^{[s(I)]}\psi$ függvényeket hiperbolikus waveleteknek nevezzük.

Bebizonyítható, hogy $I \in \{\mathbb{D}, \mathbb{T}\}$ esetben a $V^{[s(I)]}$ reprezentáció irreducibilis a $\mathcal{H}^2(I)$ téren, következésképpen az általa generált $\mathcal{V}_\psi$ hiperbolikus wavelet transzformáció injektív. A [63], [64], [65] dolgozatokban a szóban forgó esetekben vizsgáltuk a $\mathcal{H}^2(I)$ megengedett elemeit és megadtuk a Plancherel-formula megfelelőit a hiperbolikus wavelet transzformáltra. Például $I = \mathbb{D}$, azaz a $\mathcal{H}^2(\mathbb{I}) = \mathcal{B}^2(\mathbb{D})$ Bergman-tér esetén megmutattuk, hogy minden $\psi \in \mathcal{B}^2(\mathbb{D})$ megengedett, továbbá

$$\|\mathcal{V}_\psi f\|_{L^2_m(\mathbb{B})} = c\|\psi\|_{\mathcal{B}^2(\mathbb{D})}\|f\|_{\mathcal{B}^2(\mathbb{D})},$$

ahol c abszolút konstans és m a $(\mathbb{B}, \circ)$ csoport Haar-mértéke, amely explicit alakban adható meg.

A [64], [65] dolgozatokban előállítottuk a $V_{\mathfrak{b}}^{[2]}$ reprezentáció

$$t_{mn}(\mathfrak{b}) := \left\langle V_{\mathfrak{b}}^{[2]} e_n, e_m \right\rangle \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

mátrixát az e_n $(n \in \mathbb{N})$ bázisban. Ezen az úton eljuthatunk az optikában és a cornea topográfiában alapvető szerepet játszó $Y_n^\ell(r, \varphi)$ Zernike-függvényekhez. Nevezetesen

$$t_{mn}\left(re^{i\varphi}\right) = \frac{(-1)^m\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n+m+1}} Y^{|m-n|}_{\min\{m,n\}}(r, \varphi) \quad \left(\mathfrak{b} = \left(re^{i\varphi}, 1\right) \in \mathbb{B}\right).$$

Ennek alapján levezethetők a Zernike-függvények ismert tulajdonságai, többek között az addíciós képletek. A hiperbolikus wavelet-transzformációra vonatkozó eredmények kiterjeszthetők olyan reprezentációkra, amelyekben az $L^2_{\lambda_I}(I)$ terek helyett a $d\mu_I(z) = (1-|z|^2)^s d\lambda_I(z)$ $(I = \mathbb{D}, \mathbb{I})$ mérték által generált súlyozott Hilbert-térből indulunk ki [56],[57],[58],[59]. Diszkrét hiperbolikus waveletek konstrukciójáról, ezekkel kapcsolatos multirezolúcióról a [29], [30] dolgozatok nyújtanak betekintést. A Zernike-függvények diszkretizációjával a [62] dolgozatban foglalkoztunk. Ezt alkalmaztuk cornea felületek matematikai leírásában [24], [25], [26].

5. Alkalmazások

Ebben a pontban a hiperbolikus wavelet-transzformáció néhány alkalmazását mutatjuk be.

5.1. Pólusok, sajátértékek, identifikáció

A hiperbolikus wavelet-transzformáció felhasználható racionális függvények pólusainak, mátrixok sajátértékeinek meghatározására és rendszerek identifikációjára. Ehhez a $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})$ Hardy-tér $e_n(z) := z^n$ $(n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C})$ bázisfüggvényeivel képzett $\mathcal{L}_n := \mathcal{V}_{e_n}^{[1]}$ hiperbolikus wavelet-transzformáltakból (a diszkrét Laguerre–Fourier-együtthatókból) indulunk ki:

$$(\mathcal{L}_n f)(b) := \left\langle f, V_{\mathfrak{b}}^{[1]} e_n \right\rangle = \left\langle f, L_n^b \right\rangle \quad (n \in \mathbb{N},\ \mathfrak{b} = (b, 1) \in \mathbb{B}).$$

A $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ elemeihez a $\mathbb{D}$-n analitikus függvényekből álló $\mathcal{L}f := (\mathcal{L}_n f, n \in \mathbb{N})$ sorozatokat rendelve egy több vonatkozásban is jól használható leképezést definiálunk. Például a szóban forgó sorozat ℓ^2 normája konstans függvény a diszken: $\|(\mathcal{L}f)(b)\|_{\ell^2} = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$ $(b \in \mathbb{D})$. A

$$(Q_n f)(b) := \frac{(\mathcal{L}_{n+1} f)(b)}{(\mathcal{L}_n f)(b)} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{14}$$

nemlineáris funkcionálsorozat felhasználható racionális függvények pólusainak kiszámításához. Az elemi racionális függvényeket célszerű $f(z) = 1/(1 - \overline{a}z)^n$ $(z \in \mathbb{T}, a \in \mathbb{D})$ alakban felvenni, ahol az $a \in \mathbb{D}$ paraméter az f függvény $a^* = 1/\overline{a}$ pólusának az egységkörre vonatkozó tükörképe. Ennek alapján az a paramétert az f elemi racionális függvény n-edrendű *inverzpólusának* nevezzük. Ismeretes, hogy minden valódi racionális függvény előállítható elemi racionális függvények lineáris kombinációjaként. *Soumelidis* észrevette, hogy $n = 1$ esetén a (14) sorozat állandó, amelynek abszolút értéke az $a, b \in \mathbb{D}$ pontok $r = \rho(a, b)$ pszeudohiperbolikus távolságával egyenlő, következésképpen az $a \in \mathbb{D}$ pont a b középpontú, r sugarú hiperbolikus körön van. Ha f olyan valódi racionális függvény, amelynek a_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ inverzpólusai $\mathbb{D}$-be esnek, akkor kivételes $b \in \mathbb{D}$ pontoktól eltekintve létezik a (14) sorozat határértéke. Ez a tulajdonság felhasználható az a_i inverzpólusok kiszámítására. Ezt szemléltettük az alábbi ábrán három egyszeres inverzpólus esetén. Az egységkörrrel koncentrikus kör feltüntetett b pontjaiban meghatároztuk az $r_b := \lim_{n\to\infty} |(Q_n f)(b)|$ sugarakat, és felrajzoltuk a b középpontú, r_b sugarú hiperbolikus köröket.

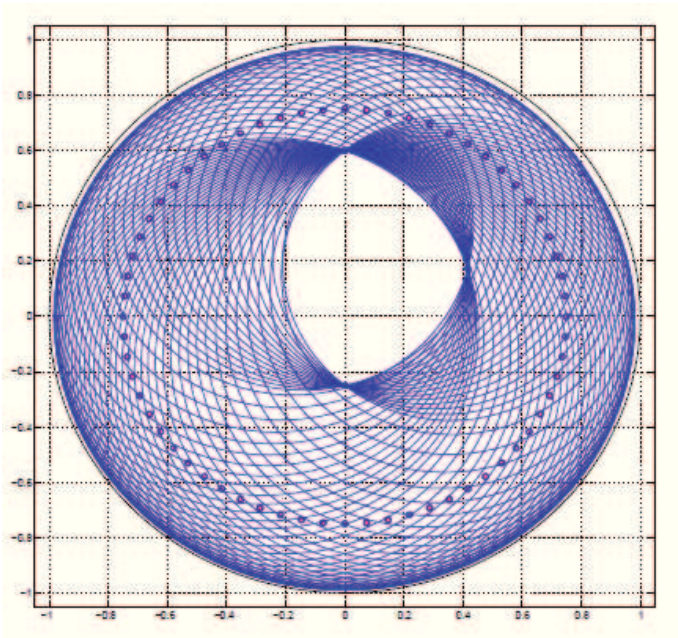
Bebizonyítható, hogy az a_i, a_j hiperbolikus szakaszok

$$D_{ij} := \{b \in \mathbb{D} : \rho(b, a_i) = \rho(b, a_j)\}$$

hiperbolikus felezőmerőlegeseinek pontjaitól eltekintve a $(Q_n f)(b)$ $(n \in \mathbb{N})$sorozat

minden $b \in \mathbb{D}$ pontban konvergens és a határérték $\mathbb{D}$ egy legfeljebb N-elemű részhalmaza. Legyen ui.

$$D_0 := \cup_{1 \le i < j \le N} D_{ij}, \quad D_i := \left\{ b \in \mathbb{D} : \rho(b, a_i) > \max_{1 \le j \le n, j \ne i} \rho(b, a_j) \right\}.$$



Az inverzpólusok meghatározása *Soumelidis* módszerével

Ekkor a D_i $(1 \le i \le N)$ halmazok páronként diszjunktak és $\mathbb{D} = \cup_{0 \le i \le N} D_i$. Bebizonyítható, hogy minden $b \in D_i$ pontban a $(Q_n f)(b), n \in \mathbb{N})$ sorozat ugyanahhoz a $b_i \in \mathbb{D}$ számhoz konvergál és ebből a_i egyszerűen rekonstruálható:

$$b_i = (Qf)(b) := \lim_{n \to \infty} (Q_n f)(b), \qquad B_b^{-1}\left(\overline{b}_i\right) = a_i \quad (b \in D_i, 1 \le i \le N).$$

Egyszeres pólusok esetén a

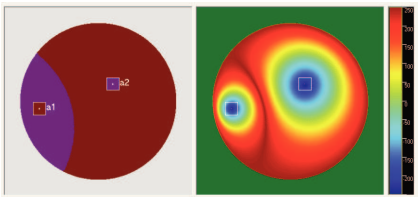
$$q_i(b) := \max_{1 \le j \le N, j \ne i} \rho(b, a_j)/\rho(b, a_i) \quad (b \in D_i, 1 \le i \le N)$$

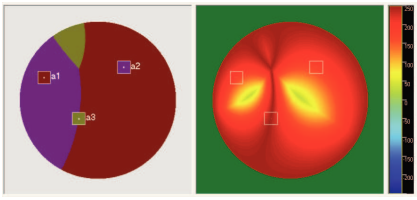
számok a konvergencia sebesség mérésére is felhasználhatók [71]:

$$|b_i - (Q_n f)(b)| = O\left(q_i^n(b)\right) \quad (b \in D_i, n \to \infty).$$

Többszörös gyök esetén a konvergencia sebessége: $|b_i - (Q_n f)(b)| = O(1/n)$. Az alábbi ábrákon két, ill. három inverzpólus esetén szemléltetjük a hiperbolikus

felezőmerőleges által létesített, különböző színű D_i tartományokat. A tartományok bármely $b \in D_i$ pontjából kiindulva a $(Q_n(b), n \in \mathbb{N})$ sorozat ugyanahhoz a $b_i = \overline{B_b(a_i)}$ számhoz konvergál. A konvergencia sebességet színskálát használva a jobb oldali ábrákon szemléltetjük.





Megjegyezzük, hogy az inverzpólusok elhelyezkedésétől függően előfordulhat, hogy valamely i-re a D_i halmaz üres. Ilyenkor az a_i^* pólust *rejtőzködőnek* nevezzük. Az ismertetett eljárással az

$$(Sf)(b) := B_b^{-1}\left(\overline{Q}f\right)(b) \quad (b \in \mathbb{B} \setminus D_0)$$

nemlineáris operátort felhasználva az f racionális függvény rejtőzködő pólusait kivéve, valamennyi pólusa megkapható. Az így kapott pólusokat leválasztva és az eljárást megismételve megkaphatjuk az f valamennyi pólusát [10], [11], [12].

A most ismertetett eljáráshoz hasonló algoritmus szerkeszthető mátrixok sajátértékeinek kiszámítására. Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ mátrix $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ sajátértékei a $\mathbb{D}$-be esnek. Tetszőleges $x_0 \in \mathbb{C}^N$ vektorból kiindulva az ún. Mises-féle iterációt alkalmazva képezzük az

$$x_{n+1} = Ax_n \in \mathbb{C}^N \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Ez a rekurzió speciális diszkrét időinvariáns rendszerként is felfogható. Az algoritmust ebben a speciális esetben mutatjuk be, megjegyezve, hogy a módszer tetszőleges időinvariáns diszkrét rendszerre kiterjeszthető. Jelölje

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \quad (z \in \mathbb{D})$$

a rendszer átviteli függvényét. Az $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^N$ függvény analitikus és

$$F(z) - x_0 = z\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^n = zA\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n\right) = zAF(z).$$

Innen következik, hogy az átviteli függvény felírható

$$F(z) = (I - zA)^{-1}x_0 \quad (z \in \mathbb{D})$$

alakban. Az F a $\overline{\mathbb{D}}$ zárt diszken analitikus racionális függvény, amely az A mátrix

$$p_A(z) := \prod_{j=1}^{m}(z-\lambda_j)^{\nu_j} \quad (z \in \mathbb{C}, m \le N, \nu_1 + \cdots + \nu_m \le N)$$

minimálpolinomjával kifejezhető

$$F(z) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\nu_j - 1} \frac{z^k}{(1-\lambda_j z)^{k+1}} h_{ij}(A) x_0$$

alakban, ahol a h_{ij}-k a p_A minimálpolinom gyökei által generált Hermite-féle interpolációs alappolinomok. Az F függvény F_j koordinátáira alkalmazva az előbb ismertetett eljárást megkapjuk a nem rejtőzködő $a_i = \lambda_i$ inverzpólusokat, ill. sajátértékeket [72].

5.2. Diszkrét ortogonális rendszerek

Ortogonális sorfejtések gyakorlati alkalmazásaiban mindig a rendszer valamely diszkretizált változatát használjuk. Ez azt jelenti, hogy az eredeti $\varphi_n : I \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ folytonos rendszer helyett első N tagjának az I intervallum egy N elemű I_N részhalmazára vonatkozó leszűkítéseit tekintjük. A diszkretizácós eljárás akkor lesz jól használható, ha a diszkrét rendszer az I_N valamely

$$[f,g]_N := \sum_{t \in I_N} f(t)\overline{g}(t)\nu_N(t) \ (\nu_N(t) > 0)$$

diszkrét skaláris szorzatára nézve ortonormált marad, azaz

$$[\varphi_n, \varphi_m]_N = \delta_{mn} \ (0 \le m, \ n < N). \tag{15}$$

Az ilyen eljárásokat *ortogonális diszkretizációnak* nevezzük. Ebben az esetben a diszkrét Fourier-sorfejtés N-edik részletösszege előállítja a kifejtett függvényt az I_N pontjaiban, következésképpen ezzel egyúttal egy interpolációs eljárást is kapunk. A trigonometrikus rendszerből az $I = [0, 2\pi)$ alapintervallum ekvidisztans felosztásával származtathatjuk a diszkrét trigonometrikus rendszert.

A Malmquist–Takenaka-rendszerek ortogonális diszkretizációjához abból indulunk ki, hogy a Blaschke-függvények a trigonometrikus rendszerből argumentumtranszformációval származtathatók:

$$B_b\left(e^{it}\right) = e^{i\beta_b(t)}, \beta_b(t) = \varphi + \gamma_r(t-\varphi) \quad \left(t \in \mathbb{R}, b = re^{i\varphi} \in \mathbb{D}\right),$$

ahol γ_r a Poisson-féle magfüggvény integrálfüggvényével egyenlő (lásd (8),(9)). Innen következik, hogy az MT-rendszerek tagjaiban szereplő Blaschke szorzatok előállíthatók

$$\prod_{k=0}^{N-1} B_{b_k}\left(e^{it}\right) = e^{iN\theta_N(t)}, \qquad \theta_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \beta_{b_k}(t)$$

alakban, ahol $\theta_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre $\theta_N(t+2\pi) = \theta_N(t)+2\pi$ $(t \in \mathbb{R})$. Az MT-rendszer Dirichlet-féle magfüggvényei, a trigonometrikus rendszerhez és az ortogonális polinomokhoz hasonlóan, zárt alakban írhatók fel [43], [60]:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Phi_j(z)\overline{\Phi}_j(\zeta) = \frac{\prod_{k=0}^{N-1} B_{b_k}(z)\overline{B}_{b_k}(\zeta) - 1}{z\overline{\zeta} - 1} \qquad \left(z, \zeta \in \overline{\mathbb{D}}\right).$$

Innen következik, hogy a

$$\mathbb{T}_N := \left\{ z_k := e^{i\tau_k} : \tau_k := \theta_N^{-1}(t_0 + 2k\pi/N),\ 0 \le k < N \right\}$$

halmaz pontjaiban:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Phi_j(z_k)\overline{\Phi}_j(z_\ell) = \delta_{k\ell}\Lambda_N(z_k), \qquad \Lambda_N(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1-|b_j|^2}{|1-\overline{b}_j z|^2} \quad (0 \le k, \ell < N).$$

Ez azzal ekvivalens, hogy az $\alpha_{jk} := \Phi_j(z_k)/\sqrt{\Lambda_N(z_k)}$ $(0 \le j, k < N)$ mátrix ortogonális, következésképpen

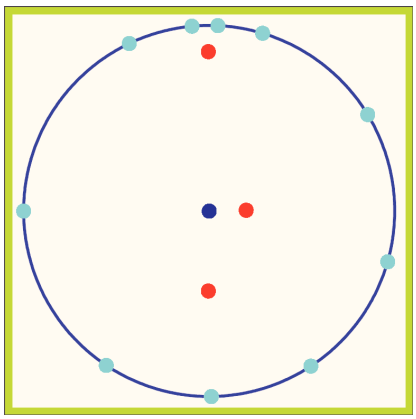
$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{rk}\overline{\alpha}_{sk} = \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_r(z_k)\overline{\Phi}_s(z_k)/\Lambda_N(z_k) = \delta_{rs}.$$

Ezzel a $I_N := \mathbb{T}_N$ halmazon a $\nu_N = 1/\Lambda_N$ súlyfüggvénnyel az MT-rendszereknek egy (15) alakú ortogonális diszkretizációját kaptuk. Ezeket az eredményeket az [23] dolgozatban átvitték a félsíkra.

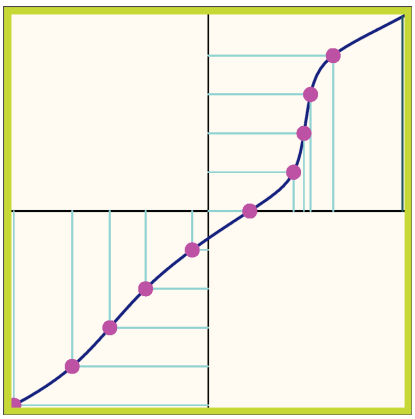
A diszkrét MT-rendszerek alkalmazásával a jelek alakjából kiinduló, adaptív interpolációs eljárásokat szerkeszthetünk. Az alábbi ábrákon a $\mathbb{T}_N$ halmazt és a θ_N függvényt szemléltetjük. A pólusok választásától függ a $\mathbb{T}_N$ pontjainak eloszlása.

Ez az eljárás jól használható EKG-görbék interpolációjára, amit az alábbi ábrán szemléltetünk [31]. Jól látható, hogy ott, ahol a függvény gyorsabban változik, ott sűrűbb felosztást alkalmazunk. A t_0 paramétert úgy választható, hogy a görbe maximumhelye a csomópontok között legyen. Az optimális approximációt eredményező pólusok meghatározására szolgáló algoritmusokat a későbbiekben vázoljuk.

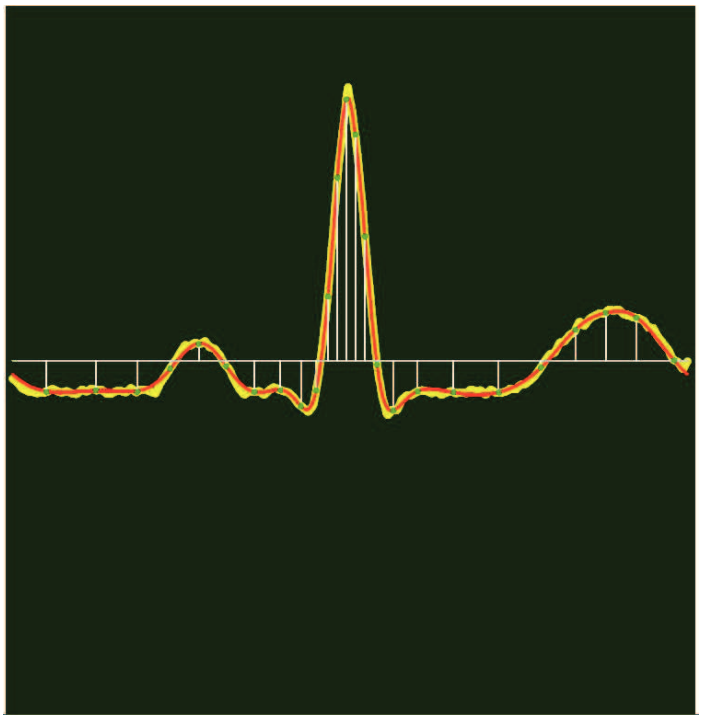
Megjegyezzük, hogy a Christoffel–Darboux-formulából hasonló módon adódik a $\nu : I \to (0, \infty)$ súlyfüggvényre ortogonolális P_n^ν $(n \in \mathbb{N})$ polinomrendszer egy ortogonális diszkretizációja [77]. Nevezetesen az I_N halmaznak a P_N^ν gyökeit választva a $\varphi_n = P_n^\nu$ $(0 \le n < N)$ függvényekre fennáll a (15) diszkrét ortogonalitási reláció, ahol ebben az esetben $\nu_N(t)$ $(t \in I_N)$ a Christoffel–Darboux-féle számokat jelentik. Ezeket az elveket alkalmaztuk Zernike-függvények ortogonális diszkretizációjában, továbbá egyéb diszkrét ortogonális rendszerek, approximációs és interpolációs eljárások szerkesztésében. Az így kapott eredmények jól használhatók a



A $\mathbb{T}_N$ halmaz



A θ_N függvény



EKG-görbe közelítése diszkrét MT-sorfejtéssel

szem szaruhártyája, a cornea felületének matematikai leírására és a gömbfelületen értelmezett függvények közelítésére [25], [26], [61], [62].

5.3. Diszkretizáció és elektrosztatikai egyensúly

Az MT-rendszerek és az ortogonális polinomok számos hasonló tulajdonsággal rendelkeznek. A klasszikus ortogonális polinom gyökei egy elektrosztatikai egyensúllyal hozhatók kapcsolatba [77]. Hasonló interpretáció adható a $\mathbb{T}_N$ diszkretizációs pontrendszerre [60]. Nevezetesen legyen

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &:= \prod_{j=0}^{N-1} (z - b_j), \\ \omega_2(z) &:= \prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \overline{b}_j z\right), \\ \omega(z) &:= \omega_1'(z)\omega_2(z) - \omega_2'(z)\omega_1(z) \quad (z \in \mathbb{C}). \end{aligned} \tag{16}$$

Ekkor a $2(N-1)$-edfokú ω polinomnak bármely $\lambda \in \mathbb{C}$ gyökével együtt a $\lambda^* := 1/\overline{\lambda}$ szám, a λ $\mathbb{T}$-re vonatkozó tükörképe is gyöke, ugyanazzal a multiplicitással. Jelölje $\lambda_k \in \mathbb{D}$ $(k = 1, \dots, s)$ az ω függvény $\mathbb{D}$-be eső, páronként különböző gyökeit és legyen m_k a λ_k multiplicitása. Ekkor fennáll a következő egyensúlyi feltétel:

$$\sum_{k=1, k\neq n}^{N} \frac{1}{z_n - z_k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{m_j}{z_n - \lambda_j} + \frac{m_j}{z_n - \lambda_j^*} \right) \quad (n = 1, 2, \dots, N). \tag{17}$$

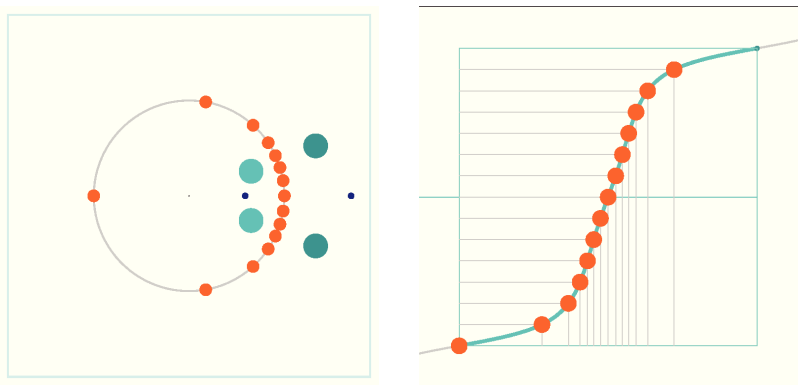
Az alábbi ábrán a diszkrét Kautz-rendszernek megfelelő $b_0 = b,\ b_1 = \overline{b} \in \mathbb{D}$ esetben szemléltetjük az egyensúlyi helyzetet, ahol $m_0 = m_1 = 7,\ N = 14$. Ebben az esetben a $2N - 2 = 26$-odfokú ω polinomnak a $b_0,\ b_1,\ b_0^*,\ b_1^*$ számok 6-szoros gyökei, amelyeket az ábrán a multiplicitással arányos sugarú (világos- és sötétkék színű) körökkel, a maradék λ és λ^* egyszeres multiplicitású gyökpárt a muliplicitással arányos fekete színű körökkel szemléltetjük. A $\mathbb{T}_N$ pontjait sárga színnel tüntettük fel.

Speciálisan $b_0 = \cdots = b_{N-1} = b$ esetén az ω polinomnak a b és b^* számok $(N-1)$ multiplicitású gyökei és ebben az esetben az egyensúlyi egyenlet:

$$\sum_{k=1, k\neq n}^{N} \frac{1}{z_n - z_k} = \frac{N-1}{2} \left(\frac{1}{z_n - b} + \frac{1}{z_n - b^*} \right) \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

Ez utóbbi két egyenlet elektrosztatikus egyensúlyi feltételként interpretálható. Az

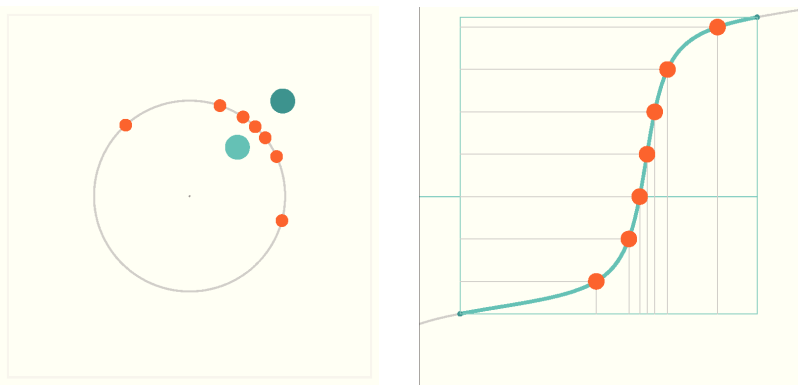
$$F_{nk} = \frac{1}{\overline{z}_n - \overline{z}_k} = \frac{1}{|z_n - z_k|} \frac{z_n - z_k}{|z_n - z_k|}$$



A

$\mathbb{T}_N$ pontjai Kautz-rendszer esetén

kétdimenziós vektor olyan két azonos előjelű, egységnyi töltés között fellépő taszító erővel egyenlő, ahol a Coulomb-erő a töltések távolságának reciprokával arányos. A második egyenletet interpretálva helyezzünk el N egységnyi töltéssel rendelkező, az egységkörön szabadon mozgó részecskét és rögzítsünk a b és b^* pontokban egy-egy $(N-1)/2$ töltéssel rendelkező részecskét. Az ezek által kifejtett erőket külső, a mozgó töltések által kifejtett erőket belső erőknek nevezzük. A (17) egyenlet azt fejezi ki, hogy minden z_n részecskére ható külső erők eredője a rá ható belső erők eredőjével egyenlő.



A

$\mathbb{T}_N$ pontjainak elektrosztatikus interpretációja

5.4. MT-sorfejtések szummációja

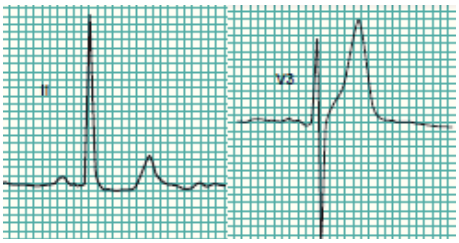
Az MT-rendszerek diszkrét változatát rendszerek identifikációjában, EKG-görbék approximációjában és tömörítésében használtuk. Az első problémakörrel összefüggésben megemlítünk két eredményt, amelyek periodikus MT-rendszerek szerinti sorfejtések (speciálisan diszkrét Laguerre- és Kautz-sorok) szummációjával kapcsolatosak. Előfordulhat, hogy a szóban forgó sorfejtések, a trigonometrikus Fourier-sorokhoz hasonlóan, még folytonos függvény esetén sem konvergálnak. Ennek a hátránynak a kiküszöbölésére szummációs eljárásoknak egy széles osztályát (az ún. θ-szummációkat) alkalmazva megmutattuk, hogy folytonos függvények periodikus MT-rendszer szerinti θ-közepei egyenletesen konvergálnak. Hasonló eredményeket igazoltunk diszkrét sorfejtésekre periodikus MT-rendszerek esetén [7],[8], [13].

5.5. EKG-görbék approximációja

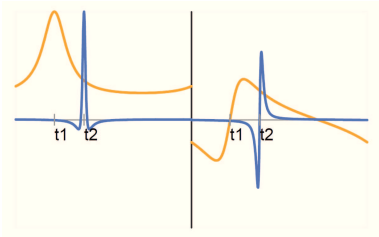
A trigonometrikus rendszerhez hasonlóan $b_0 = 0$ esetén a $\Phi_{-n}(z) = \overline{\Phi}_n(z)$ $(z \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{N})$ függvények hozzávételével az MT-rendszer kiegészí thető az $L^2(\mathbb{T})$ téren ortonormált rendszerré. Ekkor az $\Re\Phi_n, \Im\Phi_n$ $(n \in \mathbb{N})$ valós rendszerek is ortogonálisak az $L^2(\mathbb{T})$ téren. Az EKG-görbéket 2π szerint periodikus függvényekkel modellezzük. Tipikus szakaszai (pl. az ún. QRS-komplexusok) hasonlítanak az MT-rendszereket generáló

$$r_{b,j}(z) := \frac{1}{\left(1 - \bar{b}z\right)^j} \quad (b \in \mathbb{D},\ j = 1, 2, \ldots,\ z \in \mathbb{T})$$

ún. elemi racionális függvények valós és képzetes részeinek lineáris kombinációihoz. Ez az észrevétel volt a háttere annak, hogy a trigonometrikus-, ill. wavelet-sorfejtések helyett az EKG-görbéket a valós MT-bázisokban reprezentáljuk. Az alábbi ábra bal oldali részén egy valódi EKG-jel két elvezetésének a grafikonja látható. Az ábra jobb oldali részén elemi racionális függvények valós és képzetes részeinek grafikonja látható. A sárga szinű görbék az egyszeres, a kék színűek a kétszeres multiplicitású pólusoknak felelnek meg.



Valódi EKG-jel két elvezetése



Elemi racionális függvények

A valós MT-rendszerek ortogonális diszkretizációját alkalmazva optimális $(b_j, j \in \mathbb{N})$ paraméterek meghatározására különböző algoritmusokat dolgoztunk ki. Az EKG-görbék elemzése során szerzett tapasztalatok alapján három paramétert, a b_1, b_2, $b_3 \in \mathbb{D}$ inverzpólust használtunk, és ezeket ismételtük periodikusan. Az f EKG-jel optimális reprezentációjához két lépésben jutunk el: először meghatározzuk az f-nek az

$$\mathcal{L}_s := \operatorname{span}\{\Re r_{b_j,k}, \Im r_{b_j,k} : 1 \le j \le 3, 1 \le k \le s\}$$

altértől vett

$$\operatorname{dist}(b_1, b_2, b_3) := \min_{g \in \mathcal{L}_s} \|f - g\|$$

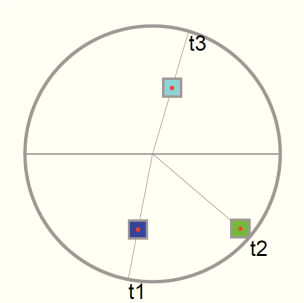
távolságát, majd ezt minimalizáljuk a b_1, b_2, b_3 paraméterekre.

Az első lépésben felhasználjuk az f-nek a diszkrét valós MT-rendszer szerinti sorfejtését, amely egyúttal interpolál a diszkretizáció pontjaiban. A dist függvény minimalizálására többek között a Nelder–Mead-algoritmusnak egy hiperbolikus térre adaptált változatát használtuk [31], [32], [48]. A diszkrét MT-rendszerek alkalmazását segítő MatLab Toolbox készült [44]. A diszkretizáció csomópontjainak kiszámítására a [47] és az [51] dolgozatokban hatékony algoritmusok születtek. A dist függvény más elven történő minimalizálását és más típusú alkalmazásokat illetően a [45], [46] dolgozatokra utalunk.

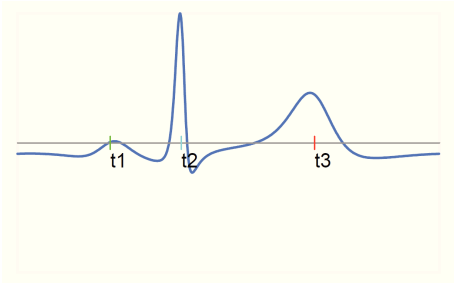
Az FFT-hez hasonló gyors algoritmusok szerkeszthetők bizonyos speciális MT-rendszrekre. Ezek 2^n-tényezős Blaschke-szorzatok szorzatrendszereiként állíthatók elő. A generáló tényezők, amelyek a Rademacher-függvények megfelelői, kétténye-zős Blaschke-szorzatokból függvénykompozicióval származtathatók. Ilyen rendszerek szerkesztésének elvi és gyakorlati problémáival a [9] és a [49] és [50] dolgozatok foglalkoznak. Racionális ortogonális sorfejtések mellett gyakran célszerű ilyen típusú biortogonális sorfejtéseket használni. A [33] és a [34] dolgozatokban racionális ortogonális és biortogonális rendszereket konstruáltunk a tóruszon és a diszken.

Az EKG-görbét az optimális paraméterekhez tartozó diszkrét MT–Fourier-együtthatókkal reprezentálva jó tömörítést és alakhű approximációt kapunk. Az alábbi ábrán egy valódi EKG-görbe approximációját szemléltetjük, ahol 3 (egy kétszeres és két egyszeres multiplicitású) pólust használtunk és az optimális inverzpólusokat a Nelder–Mead-algoritmus hiperbolikus változatával határoztuk meg.

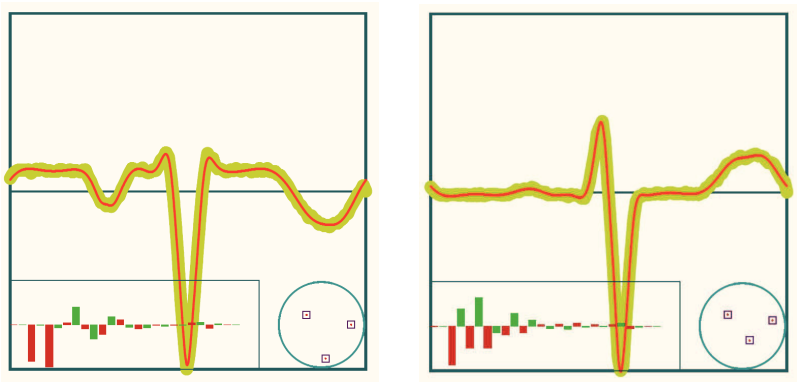
A gyakorlatban az EKG-jelről általában több (6, ill. 12) elvezetést készítenek. A szív működését az ún. szívgörbével, az egyes elvezetéseken regisztrált jeleket a szívgörbének egy-egy irányba eső vetületével modellezhetjük. Ezzel a modellel nemcsak az egyes elvezetések kvalitatív leírásához, hanem jó közelítéseihez is eljuthatunk [31]. Az alábbi ábrán ugyanannak az EKG-jelnek két különböző elvezetésének approximációját szemléltetjük három inverzpólus által generált diszkrét MT rendszert használva. Az ábrán feltüntettük a három inverzpólust és a diszkrét MT–Fourier-együtthatókat.



Az MT-rendszer pólusai



Az EKG-jel approximációja



EKG-jel két elvezetésének közelítése

Hivatkozások

[1] Alexits, G.: *Convergence problems of orthogonal functions.* Pergamon Press, New York, (1961)

[2] Banach, S.: *Théorie des opérations linéaires.* Monog. Mat., Warszawa, (1932)

[3] Benedetto, J.J: *Harmonic Analysis and Applications.* CRC Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo (1997)

[4] Blaschke, W.: *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen.* Math. Phys. Kl. Sächs. Gessel. der Wiss. Leipzig, **67**, 194–200 (1915)

[5] Bockarev, S.V.: *Existence of bases in the space of analytic functions and some properties of the Franklin system.* Mat. Sbornik, **95** (**137**), 3–18 (1974)

[6] Bokor J., Gianone L., Schipp F.: *Approximate H^∞ identification using partial sum operators in the disc algebra basis.* Proc. Amer. Control Conf. Seatle, WA, (1995), IEEE Press, 1981–1985

[7] Bokor J., Schipp F.: *L^∞ system approximation algorithms generated by φ summation.* IFAC AUTOMATICA J. **33** (11), 2019–2024 (1997)

[8] Bokor J., Schipp F.: *Approximate linear H^∞ identification in Laguerre and Kautz basis.* IFAC AUTOMATICA J. **34**, 463–468 (1998)

[9] Bokor J., Schipp F.: *Rational bases generated by Blaschke product systems.* 13th IFAC Symposium on System Identification, SYSID-2003, 1351–1356 (CD)

[10] Bokor J., Schipp F., Soumelidis A.: *Pole structure estimation from Laguerre representation using hyperbolic metric on the unite disc.* 50th IEEE Conf. on Decision and Control an European Control Conf.,Orlando, Florida, December 12–15, 2136–2141 (2011)

[11] Bokor J., Schipp F., Soumelidis A.: *Applying Hyperbolic Wavelets in Frequency Domain Identification.* Int. Conference in Control Automation and Robotics, ICINCO 2012, July 28–30 Rome, Italy, 532–535 (2012)

[12] Bokor J., Schipp F., Soumelidis A.: *Realizing system poles identification on the unit disc based on Laguerre representations and hyperbolic metric*, 21st Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), Platinias-Chania, Crete, Greece, June 25–28, 1208–1213 (2013)

[13] Bokor J., Schipp F., Szabó Z.: *Identification of rational approximate models in H^∞ using generalized orthonormal basis.* IEEE Trans. Autom. Control, **44** (1), 153-158 (1999)

[14] Burkholder D. L.:*Distribution function inequalities for martingales.* Ann. Prob., **1**, 19–42 (1973)

[15] Ciesielski, Z.: *Properties of the orthonormal Franklin system I, II.* Studia Math. **23**, 141–157 (1963), **27**, 289–323 (1966)

[16] Ciesielski, Z., Domsta, J.: *Construction of orthonormal basis in $C^n(I^d)$ and $W_p^m(I^d)$.* Studia Math. **41**, 211–224 (1972)

[17] Ciesielski, Z.: *Haar orthogonal function in analysis and probability.* Coll. Math. Soc. J. Bolyai **49**, 25–56 (1985)

[18] Ciesielski, Z., Simon, P., Sjölin P.: *Equivalence of Haar and Franklin bases in L^p spaces.* Studia Math. **60**, 195–210 (1977)

[19] Coxeter, H.S.M.: *Non-euklidian geometry.* University of Toronto Press, Toronto (1942)

[20] Daubechies, I.: *Ten Lectures on Wavelets.* SIAM, Philadelphia, Pennsylvania (1992)

[21] Duren, P. L.: *Theory of H^p spaces.* Academic Press, New York-London (1970)

[22] Duren, P., Schuster, A.: *Bergman Spaces.* AMS, Mathematical Surveys and Monographs, **100** (2003)

[23] Eisner T., Pap M.: *Discrete Orthogonality of the Malmquist-Takenaka System of the Upper Half Plane and Rational Interpolation.* J. Fourier Anal. Appl. **20** (1) (2014), 1–16.

[24] Fazekas Z., Soumelidis A., Bódis-Szomorú A., Schipp F.: *Specular surface reconstruction for multi-camera corneal topographer arrangements.* 30th Annual International IEEE EMBS Conference, Vancouver, Canada, Aug. 20–24, 2254–2257 (2008)

[25] Fazekas Z., Pap M., Soumelidis A., Schipp F.: *Discrete orthogonality of Zernike functions and its application to corneal measurements.* Electronic engineering and computing technology. Lecture notes in electrical engineering 60, Springer, Dordrecht, 455–469 (2010)

[26] Fazekas Z., Pap M., Soumelidis A., Schipp F.: *Generic Zernike-based Surface Representation of Measured Corneal Surface Data.* Proc. IEEE International Symposium on Medical Measurments and Applications, MeMeA, Bari, Italy, 148–153 (2011)

[27] Feichtinger, H., Gröchenig, A.: *A unified approach to atomic decomposition trough integrable group representation.* Lecture Notes in Math., Springer **1302**, 52–73 (1988)

[28] Feichtinger, H., Gröchenig, A.: *Banach spaces related to integrable group representation and their atomic decomposition I.* J. Funct. Anal. **86**(2), 307–340 (1989)

[29] Feichtinger H.G., Pap M.: *Hyperbolic wavelets and multiresolution in the Hardy space of the upper half plane.* Blaschke Products and Their Applications, Fields Institute, Communications **65**, 193–208 (2013)

[30] Feichtinger H.G., Pap M.: *Coorbit theory and Bergman spaces.* HCCA, Springer, (2014), 231–259.

[31] Fridli S., Lócsi L., Schipp F.: *Rational Function Systems in ECG Processing.* Computer Aided System Theory-EUROCAST 2011, 13th International Conference Las Palmas de Gran Canaria,Spain, February 2011, Revised Selected Papers, Part I, Springer LNCS 6927, 88–95.

[32] Fridli S., Kovács P., Lócsi L., Schipp F.: *Rational modeling of multi-lead QRS complexes in ECG signals.* Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **37**, 145–155 (2012)

[33] Fridli S., Schipp F.: *Biorthogonal systems to rational functions.* Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **35**, 95–105 (2011)

[34] Fridli S., Gilián Z., Schipp F.: *Rational orthogonal system on the plane.* Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **39**, 63–77 (2013)

[35] Garnett, J. B.: *Bounded analytic functions.* Springer, New York (2007)

[36] Grossman, A., Morlet, A., Paul, T.: *Transforms associatet to square group representations I. General results.* J. Math. Phys. **26**, 2473–2479 (1985)

[37] Haar, A.: *Zur Theorie der orthogonalen Functionensysteme.* Inaugural-Dissertation (Göttingen, 1909), 1–49, Math. Annal. **69**, 331–271 (1910)

[38] Harmuth H.F.: *Transmission of information by orthogonal functions.* Springer-Verlag, Berlin (1972)

[39] Harmuth H.F.: *Sequence theory.* Academic Press, New York, N.Y. (1977)

[40] Hardy, G.H.: *On the mean value of the modulus of an analytic function.* Proc. London. Math. Soc. **14**, 269–277 (1915)

[41] Hedenmalm, H., Korenblum, B., Kehe Zhu: *Theory of Bergman Spaces.* Springer, Graduate Text in Math. **199** (2000)

[42] Heil, C. E., Walnut, D. L.: *Continuous and discrete wavelet transforms.* SIAM Rewiew **31**(4), 628–666 (1989)

[43] Heuberger, S.C., Van den Hof, P.M.J., Wahlberg, B.: *Modelling and Identification Rational Orthogonal Basis Functions.* Springer, London Limited (2005)

[44] Kovács, P., Lócsi, L.: *RAIT: the Rational Approximation and Interpolation Toolbox for Matlab, with Experiments on ECG Signals.* The International Journal of Advances in Telecommunications, Electrotechnics, Signals and Systems, 1/2-3, 67–75 (2012)

[45] Kovács, P., Kiranyaz, S., Gabbouj, M.: *Hyperbolic Particle Swarm Optimization with Application in Rational Identification.* Proceedings of the 21st European Signal Processing Conference (EUSIPCO), (2013) 1–5.

[46] Kovács, P., Sammiee, K., Gabbouj, M.: *On Application of Rational Discrete Short Time Fourier Transform in Epileptic Seizure Classification.* Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal processing, (2014) 5839–5843.

[47] Kovács, P., Vad, V.: *Fast Computing of Non-Uniform Sampling Positions of Real Signals.* Proceedings of the 15th International Symposium on Symbolic and Numerical Algorithms for Scientific Computing (SYNACS) 146–150, 2013.

[48] Lócsi, L.: *Constructing Orthogonal Systems Using Blaschke Products.* MACS 2010, Proc. 8th Joint Conf. on Math. and Comp. Sci., Math., 43–50 (2011)

[49] Lócsi, L.: *An Inverse Problem with Compositions of Blaschke Products.* Mathematica Pannonica, 24/1 (2013), 141–156.

[50] Lócsi, L.: *Rational FFT Implementation in Matlab.* Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **36** (2012), 241–254.

[51] Lócsi, L.: *Calculating non-equidistant discretizations generated by Blaschke products.* Acta Cybernetica **20** (2011), 111–123.

[52] Malmquist, F.: *Sur la détermination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donné de points.* Comptes Rendus du Sixieme Congres des mathhématiciens scandinaves, Copenhagen, Denmark, 253–259 (1925)

[53] Meyer, Y.: *Ondelettes et opérations I and II.* Hermann, Paris (1990)

[54] Meyer, Y.: *Wavelets, algorithms and applications.* SIAM (1993)

[55] Móricz, F.: *Harmonikus analízis a komplex egységkörlapon.* POLYGON, Szeged (2013)

[56] Pap, M.: *The voice transform generated by a representation of the Blaschke group on the weighted Bergman spaces.* Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **33**, 321–342 (2010)

[57] Pap, M.: *Properties of the voice transform of the Blaschke group and connection with atomic decomposition results in the weighted Bergman spaces.* J. Math. Anal. Appl. **389**, 340–350 (2012)

[58] Pap M.: *Hyperbolic wavelets and Multiresolution in $H^2(\mathbb{T})$.* J. Fourier Anal. Appl. **17**, 755–776 (2011)

[59] Pap M.: *Multiresolution in Bergman space.* Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. **30**, 333–353 (2013)

[60] Pap M., Schipp F.: *Malmquist-Takenaka systems and equilibrium conditions.* Mathematica Pannonica **12**, 185–194 (2001)

[61] Pap M., Schipp F.: *Malmquist-Takenaka systems over the set of quaternions.* Pure Mathematics and Applications **15**, 261–272 (2004)

[62] Pap M., Schipp F.: *Discrete orthogonality of Zernike functions.* Mathematica Pannonica **16**, 137–144 (2005)

[63] Pap M., Schipp F.: *The voice transform on the Blaschke group I.* Pure Mathematics and Applications **17** (3–4), 387–395 (2006)

[64] Pap M., Schipp F.: *The voice transform on the Blaschke group II.* Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. **29**, 157–173.

[65] Pap M., Schipp F.: *The voice transform on the Blaschke group III.* Publ. Math. Debrecen **75** (1–2), 263–283 (2009)

[66] Prestini E.: *The Evolution of Applied Harmonic Analysis.* Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäser (2003)

[67] Riesz, F.: *Über die Randwerte einer analytischen Funktion.* Math. Z. **18**, 87–95 (1923)

[68] Sarason, D.: *Holomorphic Spaces: A Brief and Selective Survey.* MSRI Publications **33**, 1–34 (1998)

[69] Schipp, F.: *Walsh functions, commentary.* Joseph L. Walsh selected papers, eds. T.J. Rivlin and E.B. Saff, Springer-Verlag, 129–135 (2000)

[70] Schipp F.: *Wavelets on the disc.* Proc. Workshop on Systems and control theory. In honor of J. Bokor on his 60th birthday, September 9, 2008, BME AVVC, MTA SZTAKI, 101–109 (2009)

[71] Schipp F., Soumelidis A.: *On the Fourier coefficients with respect to the discrete Laguerre system.* Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **34**, 223–233 (2011).

[72] Schipp F., Soumelidis A.: *Eigenvalues of matrices and discrete Laguerre-Fourier coefficients.* Mathematica Pannonica **23**/1, 147–157 (2012)

[73] Schipp F., Szili L.: *Approximation in H^∞-norm.* AFS95 Bolyai Soc. Math. Studies, Budapest, **5**, 13–30 (1996)

[74] Schipp, F., Wade, W.R., Simon, P., Pál, J.: *Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis.* Akadémiai Kiadó, Budapest Akadémiai Kiadó, Budapest and Adam Hilger, Bristol and New York (1990)

[75] Szabados, J., Tandori, K. (Eds.): *A. Haar Memorial Conference.* Coll. Math. Soc. J. Bolyai **49**, North-Holland (1987)

[76] Szegő, G.: *Beiträge zur Theory der Toeplitzschen Formen I, II.* Math. Z. **6**, 167–202 (1920), **9**, 167–190 (1921)

[77] Szegő, G.: *Orthogonal Polynomials.* AMS Colloquium Publications, **23** (1975)

[78] Szőkefalvi-Nagy, B.: *Valós függvénytan és függvénysorok.* POLYGON, Szeged (2002)

[79] Szőkefalvi-Nagy, B., Foias, C.: *Harmonic analysis of operators on Hilbert space.* North-Holland, Amsterdam, Akadémiai Kiadó, Budapest (1970)

[80] Stankovic R.S., Astola J.R. (eds.): *Reminescences of the Early Work in Walsh Functions.* Special isues of TICSP Series, Tampere, Finland (2011)

[81] Takenaka, S.: *On the orhogonal functions and a new formula of interpolation.* Japanese Journal of Mathematics, II, 129–145 (1925)

[82] Uljanov, P.L.: *Haar series and related questions.* Coll. Math. Soc. J. Bolyai **49**, 57–96 (1985)

[83] Wawrzynczyk, A.: *Group Representations and Special Functions.* Reidel, PWN (1983)

[84] Weisz F.: *Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier-analysis.* Lecture Notes in Math., Springer, Berlin **1568**, (1994)

[85] Weisz F.: *Summability of Multi-Dimensional Fourier Series and Hardy Spaces.* Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, **541** (2002)

[86] Zygmund, A.: *Trigonometric series I., II.* Cambridge University Press (1959)

(Beérkezett: 2014. május 7.)

SCHIPP FERENC
Numerikus Analízis Tanszék, ELTE IK
Pázmány P. sétány I/C, Budapest, H-1117 Hungary

HYPERBOLIC WAVELETS

Ferenc Schipp

In the last two decades a number of different types of wavelets transforms have been introduced in various areas of mathematics, natural sciences and technology. These transforms can be generated in a uniform way based on various group representations. Taking the congruences of the hyperbolic geometry we introduced the concept of hyperbolic wavelet transforms (HWT) by means of this method. In this paper we give an overview on some results and applications concerning HWT. We call the attention to previous results of Hungarian mathematicians in the areas of control theory and signal processing that can now be viewed from a new rspective. Recently,as a result of the collaboration of the Department of Numerical Analysis of Faculty of Informatics of Eötvös L. University (Budapest, Hungary) and the Systems and Control Lab of the Institute of Computer Science and Control of the Hungarian Academy of Sciences, rational function systems and hyperbolic wavelets have been effectively applied in solving problems related to system and control theories, signal processing, and in construction of a mathematical model for ECG signals.

Alkalmazott Matematikai Lapok **32** (2015), 41–61.

JÉGKORONGCSAPAT ÖSSZEÁLLÍTÁSÁNAK VALÓS IDEJŰ OPTIMALIZÁLÁSA ADATBÁNYÁSZATI ESZKÖZÖK SEGÍTSÉGÉVEL

SÜDY BARBARA

Az adatelemzés egyik legizgalmasabb ága a sportadatokohoz köthető prediktív analitika területe. A masszív adatbázisokból kinyert információ – az adott sportág kellően mély ismerete mellett – számos előrejelzés alapjául szolgálhat.

Az alábbi cikkben egy olyan modellt mutatunk be, amely adatbányászati módszerek segítségével játék közben optimalizálja egy jégkorongcsapat sorösszeállítását. A modell előre jelzi, hogy a következő játékmegszakításig melyik öt mezőnyjátékosnak lesz a legnagyobb esélye gólt szerezni, ennek alapján az edző jaték közben módosíthatja a sorösszeállítást. A modell három alegységének bemutatása mellett értékeljük azok teljesítményét, valamint említést teszünk a modell potenciális javíthatóságáról is.

1. Bevezetés

A napjainkban nagy népszerűségnek örvendő adatbányászatot (angolul *Data Mining*) az üzleti, mérnöki és tudományos élet számos területén alkalmazzák már évtizedek óta. Célja a statisztika és a mesterséges intelligencia eszközeivel masszív adatbázisokban rejtőző, eddig nem ismert, hasznos összefüggések feltárása. Az adatbányászatot többek között biztosítótársaságok, bankok, kereskedelmi vállalatok, egészségügyi szervezetek alkalmazzák vásárlási szokások elemzésére, kereskedési és kockázati modellek, befektetési stratégiák létrehozására, direktmarketing stratégia meghatározására, pénzügyi portfolió optimalizálására, betegségek modellezésére, súlyossági esetek kiszűrésére.

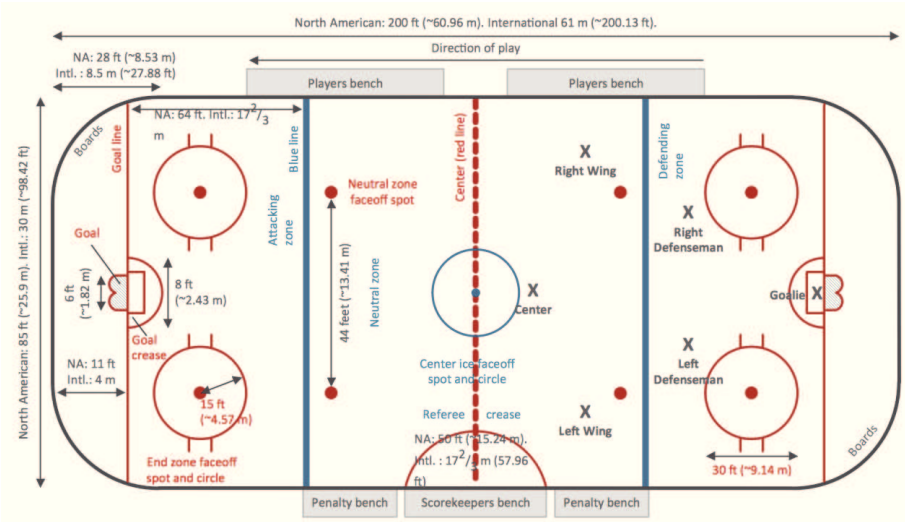
A 2000-es évek óta egyre több sportszervezet ismeri fel az adatbányászatban rejlő lehetőségeket [7]. Az adatok elemzésével feltárt információ új perspektívát nyitott számos területen: játékosmegfigyelők eddig ismeretlen, új metrikák alkalmazásával új tehetségeket fedezhetnek fel; az edzői stáb árnyaltabb képet kaphat a játékosok teljesítményéről, és még sorolhatnánk.

Ebben a cikkben egy, a jégkorongsportban eddig nem használt, új alkalmazást mutatunk be. A jégkorong intenzivitása miatt a játékosok átlagban 45 másodpercenként cserélik egymást. Játékmegszakítás esetén az edző gyakran – bár nem

minden esetben – egy teljesen új sort küld be a korongbedobáshoz. Modellünk célja, hogy a játék során eddig történt, egymást követő események alapján előrejelezzük, hogy melyik öt mezőnyjátékos játékba állítása maximalizálná a gólszerzés valószínűségét. Mivel egymást követő, sorrendfüggő adatsorokkal dolgozunk, a feladat idősorelemzésként fogható fel. A modell alapján az edző minden korongbedobás előtt, valós időben optimalizálhatja a csapatösszeállítást.

1.1. Jégkorong

A jégkorong gyors, dinamikus csapatsport. A játék célja, hogy a játékosok a korongot egy ütő segítségével az ellenfél kapujába juttassák. Egy csapat általában 18 mezőnyjátékosból és 2 kapusból áll. Ebből 1 kapus és 5 mezőnyjátékos van egyszerre a jégen, kivéve, ha szabálytalanság miatt a csapat 2 vagy 5 percre emberhátrányba kerül.



1. ábra. Jégkorong pálya

Egyszerre több játékos is kiállítható, de a kapus mellett legalább három mezőnyjátékos mindig a jégen tartózkodik. Amennyiben több, mint két játékost állítanak ki, akkor a harmadik játékos akkor kezdi letölteni a büntetését, amikor az első játékosé véget ér. Az ellenfél által lőtt gól automatikusan törli az éppen aktuális 2 perces büntetést, ám az 5 perces büntetést nem.

Mivel a jégkorong nagyon gyors és intenzív játék, az 5 játékosból álló úgynevezett sorok átlagban 45 másodpercenként váltják egymást a jégen.

A mezőnyjátékosok két csoportba sorolhatók: támadók és védők. A támadók lehetnek balszélsők, centerek vagy jobbszélsők. Egy sorban 3 támadó játékos sze-

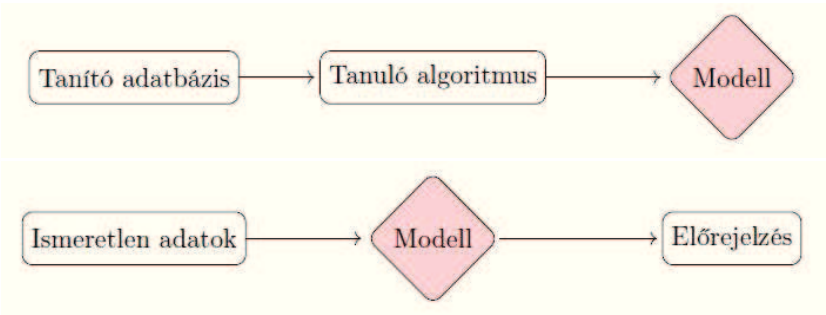
repel. A védők lehetnek bal- vagy jobbhátvédek, és általában párban játszanak. A sorcserék alkalmával általában egy új védőpár és egy új támadósor lép a jégre. Az edzők a sorokat a mérkőzés alatt bármikor cserélhetik, nem szükséges, és nem is szokás mindig megvárni a következő játékmegszakítást.

A jégkorongmérkőzés három, 20 perces harmadból áll. A 20 perc tiszta játékidőt jelent, vagyis a játék megszakítása alkalmával az órát megállítják. Játékmegszakítás után a korongot a bedobással (bulival) hozzák játékba. A két center szemben áll a bedobóhelyen, a játékvezető pedig bedobja közéjük a korongot, amit ők igyekeznek ütőjükkel saját csapattársukhoz juttatni.

1.2. Adatbányászat és gépi tanulás

Az adatbányászat célja a masszív adatbázisokban rejtőző szabályszerűségek, minták feltárása. A minták ismeretlen adatokra való alkalmazásával előrejelzéseket tehetünk, amelyek potenciálisan befolyásolhatják a felhasználó jövőbeni döntéseit. A feladat általában egy minél megbízhatóbb előrejelzéseket adó modell kifejlesztése.

A gyakorlatban a fenti probléma megoldását gyakran egy gépi tanulási (*Machine Learning*) algoritmus szolgáltaja. A gépi tanuló algoritmusnak az úgynevezett tanulási szakaszban példaadatokat (tanító adatbázis) szolgáltatunk, amely ezek alapján szabályszerűségeket határoz meg, azaz „tanul”. A szabályszerűségeket leíró modellt új, eddig ismeretlen adatokra alkalmazva „megjósolhatjuk” a hozzájuk tartozó célfüggvényértéket (2. ábra).



2. ábra. A gépi tanulás folyamatábrája

A gépi tanulási algoritmusok főbb típusai a *felügyelt*, *felügyelet nélküli*, illetve *megerősítéses* tanulás. Modellünkben felügyelt és megerősítéses tanulási algoritmusokat használunk fel.

Felügyelt tanulás esetén a célunk egy függvény közelítése. A tanító adatbázis a megtanulni kívánt függvény bemeneti és kimeneti értékeit tartalmazza. Formá-

lisan: legyenek adottak (x, y) párok, ahol $x \in \mathbb{R}^{d\times m}, y \in \mathbb{R}^{1\times m}$; előállítandó az az $f : \mathbb{R}^{d\times m} \to \mathbb{R}^{1\times m}$ függvény, amely minden (x_j, y_j) párra teljesíti, hogy $y_j = f(x_j), j = 1 \dots m$.

Az x mátrix oszlopait *független* változóknak nevezzük, az y vektort *függő változónak* vagy *célváltozónak*. Minden x_j érték valamely objektum vagy esemény leírása (pl. egy játékos hány másodperce van a jégen). Az y_j értékek az x_j értékekből történő következtetéseket reprezentálják (pl. az adott játékost lecserélik a következő másodpercben). Feltételezzük, hogy a tanulás során az y_j értékek előre meghatározottak. A bemenő adatok, azaz x_j értékei lehetnek számszerűek (pl. eltelt másodpercek száma), kategorizáltak (pl. igen/nem), de lehetnek valamely adat-előfeldolgozás eredményeként kapott értékek is (pl. átlag, maximum, minimum). Ha y-nak csak két lehetséges értéke van (pl. igen/nem), akkor fogalmi tanulásról (concept learning) beszélünk. Ebben az esetben a tanító példákat két diszjunkt részhalmazra lehet bontani: a pozitív és a negatív példák halmazára.

Diszkrét értékkészletű f függvény tanulását osztályozásnak (classification), folytonos értékkészletűét regressziónak (regression) nevezzük. A modellünkben különböző osztályozó algoritmusokat használunk, például döntési fákat [4, 3], logisztikus regressziót [2], k-legközelebbi szomszéd algoritmust [5] stb.

1.3. Mérőszámok osztályozás hatékonyságának jellemzésére

1.1. Definíció. Tekintsünk egy bináris osztályozást. A két lehetséges kimenetet nevezzük pozitívnak (P), illetve negatívnak (N) [1, 861–874. oldal]. Jelölje TP (igaz pozitív, *true positive*) a helyesen pozitívként osztályozott, FP (hamis pozitív) a tévesen pozitívként osztályozott eseteket. Hasonlóan jelölje TN és FN az igaz negatív, illetve hamis negatív előrejelzéseket. A következő mérőszámok alkalmasak az osztályozás teljesítményének értékelésére:

1. Pontosság (*Accuracy*):
$$ACC = \frac{TP + TN}{P + N}$$
2. Osztályozási hiba (*Classification Error*):
$$CE = 1 - ACC$$
3. Igaz pozitív arány (*Érzékenység*):
$$TPR = \frac{TP}{P} = \frac{TP}{TP + FN}$$
4. Hamis pozitív arány (*False positive rate*):
$$FPR = \frac{FP}{N} = \frac{FP}{FP + TN}$$

1.2. Definíció. Tekintsünk egy általános osztályozási problémát, legyen az osztályok száma n, $n \geq 2$. Legyen a $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix olyan, hogy $C_{i,j}$ megegyezik azon esetek számával, amelyek az i-edik osztályba tartoznak, de a j-edik osztályba soroltuk őket. Egy ilyen mátrixot tévesztési mátrixnak (*confusion matrix*) nevezünk. A korrekt predikciók számát a diagonális elemek összege adja:

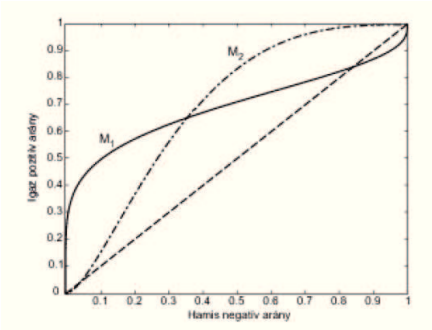
$$|\textit{Korrekt predikciók}| = \sum_{i=1}^{n} C_{i,i}$$

Osztályok	Valódi érték	
Predikció	TP	FP
	FN	TN

1. táblázat. Bináris osztályozás tévesztési mátrixa

Vevő működési karakterisztika görbe

A vevő működési karakterisztika (Receiver Operating Characteristic vagy ROC) görbe grafikus módszer az osztályozó algoritmus hatékonyságának jellemzésére. A görbe (3. ábra) generálásakor az érzékenységet (TPR) az y tengelyen ábrázoljuk, a hamis pozitív arány (FPR) pedig az x tengelyen látható [8]. Egy osztályozási modell akkor a legjobb, ha a TPR maximális, FPR pedig minimális, ebben az esetben a ROC-görbe áthalad az egységnégyzet bal felső csúcsán. Egy véletlenszerűen találgató modell görbéje közelítőleg a főátló mentén fog elhelyezkedni.



3. ábra. Két különböző osztályozás ROC görbéje

A ROC-görbe alkalmazható több osztályozó algoritmus összehasonlítására is. Ilyenkor a különböző algoritmusok eredményei egy ROC-ábrán jeleníthetők meg, a görbék egymáshoz való viszonyuk és az egységnégyzetbeli elhelyezkedésük alapján hasonlíthatók össze.

A hatékonyság számszerű értékét a görbe alatti terület nagyságával (ROC AUC) adhatjuk meg. Minél közelebb van ez az érték az 1-hez, annál hatékonyabb az algoritmusunk.

2. Az adatok

Az adatokat az NHL (National Hockey League) hivatalos weboldalán (www.nhl.com) található mérkőzések statisztikái szolgáltatják. A modellépítés során az Anaheim Ducks 2009 és 2012 között lejátszott mérkőzéseit használtuk.

VISITOR | HOME

Play By Play

2 | **7**

Sunday, April 11, 2010
Attendance 16,392 at Honda Center
Start 5:08 PDT; End 7:24 PDT
Game 1230
Final

EDMONTON OILERS
Game 82 Away Game 41

ANAHEIM DUCKS
Game 82 Home Game 41

#	Per	Str	Time: Elapsed Game	Event	Description	EDM On Ice	ANA On Ice
1	1		0:00 20:00	PSTR	Period Start- Local time: 5:08 PDT	10 34 18 6 77 38 C R L D D G	11 8 33 7 27 1 C R L D D G
2	1	EV	0:00 20:00	FAC	ANA won Neu. Zone - EDM #10 HORCOFF vs ANA #11 KOIVU	10 34 18 6 77 38 C R L D D G	11 8 33 7 27 1 C R L D D G
3	1	EV	1:17 18:43	HIT	EDM #13 COGLIANO HIT ANA #60 MIKKELSON, Off. Zone	13 16 27 2 8 38 C C R D D G	20 63 50 34 60 1 C C R D D G
4	1	EV	1:36 18:24	HIT	EDM #78 POULIOT HIT ANA #20 CARTER, Def. Zone	78 28 36 2 8 38 C L L D D G	20 63 50 34 60 1 C C R D D G
5	1	EV	1:38 18:22	SHOT	ANA ONGOAL - #4 WARD, Wrist, Off. Zone, 21 ft.	78 28 36 2 8 38 C L L D D G	20 63 50 4 21 1 C C R D D G
6	1	EV	1:41 18:19	SHOT	ANA ONGOAL - #4 WARD, Snap, Off. Zone, 43 ft.	78 28 36 2 8 38 C L L D D G	20 63 50 4 21 1 C C R D D G
7	**1**	**EV**	**2:04** **17:56**	**GOAL**	**ANA #20 CARTER(3), Wrist, Off. Zone, 26 ft.** **Assists: #28 CHIPCHURA(6); #50 BODIE(2)**	78 28 36 6 77 38 C L L D D G	20 28 50 4 21 1 C C R D D G
8	1	EV	2:04 17:56	FAC	EDM won Neu. Zone - EDM #46 STORTINI vs ANA #28 CHIPCHURA	19 91 46 6 77 38 C C R D D G	28 13 16 4 21 1 C R R D D G

4. ábra. NHL mérkőzésstatisztika

A statisztikák (4. ábra) rögzítenek minden, a játék szempontjából érdekes információt, pl. a játékmegszakítások időpontját, azok okát (gól, büntetés, les stb.), az adott pillanatban jégen tartózkodó játékosok mezszámát. Átlagosan 20 másodpercenként kapunk új információt, azaz minden meccshez 180–200 adatsor tartozik.

A tanulási folyamat megkezdése előtt az adatok előfeldolgozása szükséges. A nyers adatokból a mérkőzés minden játékmegszakítását egy $\mathbb{R}^{d+1}$-beli vektorral reprezentáljuk, amely tartalmazza a $d > 300$ darab független változó és a célváltozó aktuális játékmegszakításhoz tartozó értékét. Így minden buli előtt van egy adatsorunk, amely aggregált információt tartalmaz az eddig történt játékeseményekről.

Ez után az adatbázist kettéválasztjuk: az adatok 80%-án tanítjuk, a maradékon teszteljük a modellt.

Néhány példa független változókra:

- Kategorikus változók:
  - a buli előtti játékesemény (harmad kezdete, harmad vége, kiállítás, gól stb.),

  - a buli előtt jégen tartózkodó játékosok mezszáma az egyes pozíciókban (balszélső, jobbszélső, center, balhátvéd, jobbhátvéd, kapus).
- Numerikus változók:
  - a mérkőzésen eddig eltelt másodpercek száma,
  - a legutóbbi játékmegszakítás óta eltelt másodpercek száma,
  - egy játékos átlagosan mennyit játszott az előző 1/5/10 cserében.
- Bináris változók:
  - minden játékosra bevezetünk egy változót, amely megadja, hogy az adott játékos jégen volt-e az előző 1/30/60/90 másodpercben, illetve az előző mérkőzésen,
  - emberhátrány – értéke 1, ha a csapat emberhátrányban van, és 0, ha nem.

A végső modellben több mint 300 független változóval dolgozunk. A túl sok változó alkalmazása lelassítja a futásidőt, valamint pontatlan eredményhez vezethet. Ezt kiküszöbölendő, feature selection [5] módszerrel kiválogattuk a számunkra leghasznosabb független változókat. Az eljárás minden változóhoz hozzárendel egy úgynevezett hasznossági értéket, ami azt hivatott tükrözni, hogy az adott változó mennyi információt hordoz. A modell minden olyan változót megtart, amelynek a hasznossági értéke nagyobb, mint az összes érték mediánjának k-szorosa. A modell alapbeállítása mellett $k = 1$ értékkel dolgozunk.

3. A modell

A modellünk három részből áll. Az első rész minden játékosra előre jelzi, hogy a következő bulinál jégen lesz-e vagy sem, valamint tárolja a játékosokhoz tartozó játékbakerülési valószínűséget is. A második rész az első eredményei alapján minden pozícióra meghatározza a két legmagasabb valószínűséggel játékba kerülő játékost, valamint visszatér a legmagasabb valószínűségű játékos mezszámával – azaz előre jelzi, hogy pontosan kik alkotják majd a sort a korongbedobásnál. A harmadik rész a második modell eredményeit felhasználva megvizsgálja, hogy a két legnagyobb valószínűséggel rendelkező játékosok mely kombinációja adja a legnagyobb gólszerzési valószínűséget, és visszatér azok számával.

3.1. Első modell – játékbakerülési valószínűségek

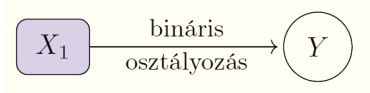
Az első modellben minden játékoshoz hozzárendelünk egy bináris változót, amely reprezentálja, hogy a játékos jégen lesz-e a most következő bulinál, vagy sem. Ezt egy osztályozó algoritmus célváltozójaként alkalmazzuk. A független változók

aggregált információt tartalmaznak a $(j-1)$-edik játékmegszakításig bekövetkezett játékeseményekről.

Alapesetben az algoritmus becslést ad a célváltozó lehetséges értékeinek valószínűségére. Amennyiben a valószínűség értéke legalább $0,5$, úgy az algoritmus kimeneti értéke 1 lesz, egyébként 0.

A modell kimeneti mátrixának oszlopvektorai a beállítástól függően reprezentálhatják az egyes játékosokhoz tartozó előrejelzéseket, vagy a nyers valószínűségeket.

Legyen X_1 a független változók mátrixa, és Y a kimeneti mátrix. A modell foyamatábrája a következő:



3.1.1. Célváltozók

Legyen $y_p \in \mathbb{R}^d$ a p játékoshoz tartozó célváltozó, ahol d az adatsorok (korongbedobások) száma. Jelölje j a buli sorszámát az adatsorunkban, $j \geq 1$. Ekkor:

$$y_{pj} = \begin{cases} 1, & \text{ha a } p \text{ játékos jégen van a } j\text{-edik bulinál,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{1}$$

A vizsgált három szezon alatt 55 játékos játszott az Anaheim Ducks csapatában, tehát 55 bináris célváltozónk van: $p \in \{1, \ldots, 55\} =: P$. A modell minden (p, j) párra előrejelzi az y_{pj}, $j \geq 2$ értéket a j-edik játékmegszakítás előtt bekövetkezett események alapján.
A célmátrix:

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{55}\} \in \mathbb{R}^{d \times 55}. \tag{2}$$

Megjegyzés. A kapussal együtt a játék minden pillanatában 4–6 játékos van a jégen, ezért

$$4 \leq \sum_{p \in P} y_{pj} \leq 6, \ \ \forall\, j \in J = \{1, 2, \ldots, d\}\,.$$

3.1.2. Független változók

Jelölje $\hat{y}_{ij} = \{0, y_{i2}, y_{i3} \ldots, y_{id}\} \in \mathbb{R}^d$ azt a vektort, amely megmondja, hogy az i-edik játékos a jégen volt-e a j-edik játékmegszakítás pillanatában.
Az alapmodell független változói:

$$x_{ij} = \hat{y}_{ij}, i \in P, j \in \{1, 2, \ldots, d\}\,, \tag{3}$$

azaz a sorösszeállítás a játékmegszakítás pillanatában.

Megjegyzés. Természetesen csak $j \geq 2$ esetén van információnk a mérkőzésről, ezért $\hat{y}_{i1} = 0$, $\forall i \in P$.

Az alapmodell teljesítményét javítandó újabb változókat adtunk a modellhez:

- SH/PP bináris változókat, amelyek értéke 1, ha a csapat emberhátrányban/emberelőnyben játszik, és 0, ha nem,
- az előző játékosmegszakítás óta eltelt másodpercek számát,
- a jégen töltött másodpercek átlagos számát az utolsó 5/10 cserében, illetve az elmúlt 30/60/90 másodpercben minden játékosra.

Jelölje $X = \{\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{55}, x_1 \ldots, x_m\} \in \mathbb{R}^{d \times (m+55)}$ az összes független változót oszlopvektorként tartalmazó mátrixot, ahol d a bulik száma, és m a hozzáadott független változók száma, $m \geq 0$.

3.1.3. A modell kimenete

A kimeneti mátrix oszlopvektorai a modell beállításától függően reprezentálhatják az egyes játékosokhoz tartozó nyers valószínűségeket, vagy az előrejelzett osztályokat. A döntési határ $0,5$.

$$out_1 = \overline{Y_1} = \left(P\left(y_1 = 1\right), \ldots, P\left(y_{55} = 1\right)\right), \tag{4}$$

$$out_2 = \overline{Y_2} = \left(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{55}\right), \tag{5}$$

$$\overline{y}_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } P\left(y_i = 1\right) \geq 0,5, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

3.1.4. Az eredmények kiértékelése

Az alapmodell a (3) egyenletben megadott független változókkal, logisztikus regresszióval és a feature selection alapbeállításával ($k = 1$) próbálja előrejelezni, hogy egy játékos jégre lép-e a korongbedobásnál.

A modell meglehetősen gyenge teljesítményt nyújt, a ROC-görbe alatti terület a legtöbb játékos esetén $0,65$ alatt van, ami azt jelenti, hogy a modell alig teljesít jobban, mintha véletlenszerűen találgatnánk.

A végső modellben a 3.1.2 részben leírtak szerint kibővítettük a független változók halmazát, valamint a feature selection eljárás döntési határát $k = 2,5$-re változtattuk. Az osztályozó algoritmus továbbra is logisztikus regresszió.

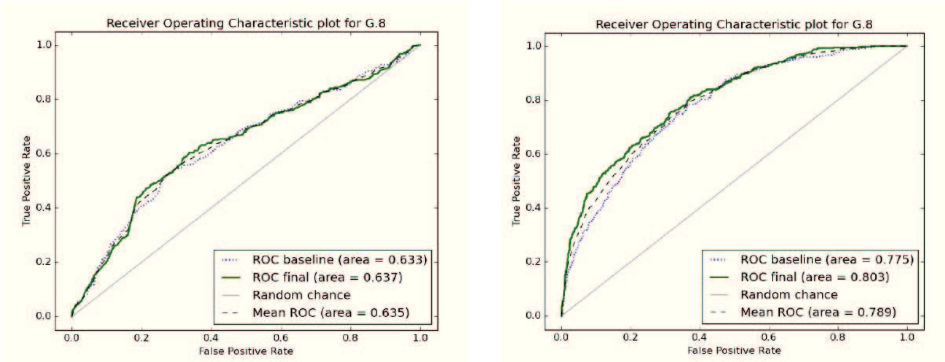
A modell teljesítménye a fenti beállítások mellett szignifikáns javulást mutatott, a játékosokhoz tartozó ROC-görbe alatti terület $0,8$ körüli értéket vett fel, több esetben meg is haladta azt. Az osztályozás érzékenysége is jelentősen javult.

Az 5(a). és 5(b). ábra az Anaheim legendás jobbszélsőjéhez, Teemu Selännehoz tartozó ROC-görbéket mutatja. A pontozott vonal mindkét esetben az aktuális modell feature selection nélküli teljesítményét reprezentálja, a vastag vonal

ugyanezt feature selection alkalmazásával. A 2. táblázat tartalmazza a részletes teljesítmény-értékelést.

Teemu Selänne #8, jobbszélső	**A modell teljesítménye**			
	Tanító adatok		**Tesztadatok**	
	Alapmodell	**Végső modell**	**Alapmodell**	**Végső modell**
Tévesztési mátrix	4031 56 1413 69	3868 219 757 471	878 30 369 30	828 80 207 192
Pontosság	$0,7714$	$0,8163$	$0,6947$	$0,7804$
Érzékenység	$0,0561$	$0,3835$	$0,0751$	$0,4812$
ROC AUC	$0,63$	$0,77$	$\mathbf{0,64}$	$\mathbf{0,80}$

2. táblázat. A modell teljesítménye Selänne esetében



(a) Alapmodell (b) Végső modell

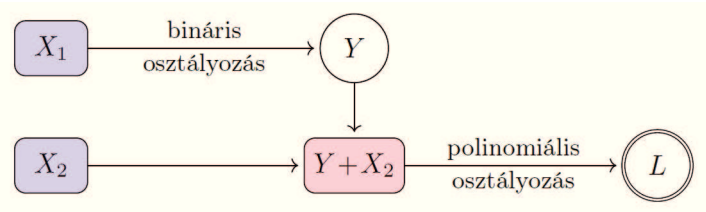
5. ábra.

3.2. Második modell – sorprediktor

A második modell polinomiális osztályozással minden játékmegszakításnál minden pozícióhoz hozzárendel két játékost, akik a legnagyobb valószínűséggel jégre lépnek a következő bulinál. A modell tárolja a játékosok azonosítóját és a hozzájuk tartozó valószínűségeket, valamint alapbeállításban visszatér a magasabb valószínűséggel rendelkező játékos mezszámával. Ezáltal előrejelzést ad a következő sorösszeállításra.

Megjegyzés. Amennyiben a csapat emberhátrányban játszik, a hiányzó játékos pozíciójában a 0 érték szerepel.

Jelölje X_1 az első modell prediktor mátrixát, Y a (4) egyenletben megadott output mátrixát. Legyen X_2 a második modellhez tartozó prediktormátrix. A kimenetet (ami az előrejelzett sor) jelöljük L-lel. A modell folyamatábrája a következő:



3.2.1. Célváltozók

Jelölje $l_{i,j} \in \mathbb{Z}$ a j-edik korongbedobásnál az i-edik pozícióban jégre lépő játékos mezszámát, ahol $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, $j \in \{1, \ldots, d\}$.

A célváltozók mátrixa:

$$line = (l_{1,j}, l_{2,j} \ldots, l_{6,j}) \in \mathbb{Z}^{d \times 6}. \tag{6}$$

3.2.2. Független változók

Az alapmodellhez tartozó független változók:

$$x_{ij} = prob_{ij}, \text{ ahol}$$

$prob_{ij} = P(y_{ij} = 1), i \in P$ az első modellből kapott valószínűségek, y_{ij} pedig az (1) egyenlettel megadott változó. Tehát $prob_{ij}$ jelöli annak a valószínűségét, hogy a i-edik játékos jégre lép a j-edik bulinál, $\forall i \in P$.

A modell továbbfejlesztéséhez újabb változókat adtunk a modellhez:

- SH/PP, a 3.1.2-ben megadott változók,
- az előző játékmegszakítás óta eltelt másodpercek számát,
- a játékosokhoz tartozó jégrelépési valószínűségek az első modell különböző beállításaival (logisztikus regresszió helyett döntési fák, véletlen erdők, valamint adaboost [6, 657-663. oldal] algoritmus alkalmazása; a feature selection döntési határa minden esetben $k = 1, 5$).

A teljes prediktormátrix:

$$X = \{prob_1, \ldots, prob_{55}, x_1, \ldots, x_m\} = \left(\hat{P}, \hat{X}\right) \in \mathbb{R}^{d \times (m+55)},$$

ahol d a bulik száma, m a hozzádott változók száma, $m \geq 0$ és $\hat{P}$ a (4) egyenletben megadott mátrix.

3.2.3. A modell kimenete

A modell kimenete egy olyan mátrix, amely megadja az egyes játékosok jégrelépési valószínűségét minden pozícióban; vagy a legmagasabb valószínűséggel rendelkező játékosok mezszámait.
Jelölje $\#_i$ az i-edik játékos számát, $i \in \{1, \ldots, 55\}$:

$$out_1 = \overline{P} = (P(l_1 = \#_i), \ldots, P(l_6 = \#_i)) \in \mathbb{Z}^{d \times 6}, \forall i \tag{7}$$

$$out_2 = line^* = (l_1^*, \ldots, l_6^*), \text{ ahol} \tag{8}$$

$$l_k^* = \max_i (P(l_k = \#_i)), \quad k \in \{1, \ldots, 6\}.$$

3.2.4. Az eredmények kiértékelése

Az alapmodell polinomiális logisztikus regresszióval, feature selection nélkül tesz előrejelzést a sorösszeállításra. Akárcsak az előző esetben, a modell teljesítménye meglehetősen gyenge. A tanító adatokon $49,2\%$-os hibával jósolja meg a sorösszeállítást, a tesztadatokon a hiba közel 53%-os. Itt megjegyeznénk, hogy a sorösszeállítás helyes előrejelzése jóval komplexebb feladat, mint az egyes játékosok jégrelépési valószínűségének kiszámítása, ám ez az eredmény ennek ellenére sem elfogadható.

A végső modell a kibővített prediktormátrix mellett továbbra is polinomiális logisztikus regresszióval dolgozik. A feature selection eljárás döntési határa $k = 1,5$. A modell hibája a tanító adatokon $33,7\%$-ra, a tesztadatokon $43,4\%$-ra csökkent.

A $43,4\%$-os hibaarány elfogadható, de nem kiemelkedően jó eredmény. Jelenleg is dolgozunk a modell javításán, pl. további független változók bevezetésével (ellenfél sorösszeállítása a játékmegszakítás pillanatában; egyéni játékos-statisztikák stb.), illetve különböző osztályozási algoritmusok alkalmazásával.

A 3. és 6. táblázat részletes leírást ad az egyes modellékosztályozási hibákról, a 4., 5., 7. és 8. táblázat pedig példát ad néhány sor-előrejelzésre az alapmodell és a végső modell segítségevel a tanító, illetve tesztadatokon.

3.3. Harmadik modell – alternatív sorok

A harmadik modell célja, hogy olyan alternatív sorösszeállítást találjon, amely legalább akkora valószínűséggel szerez gólt a következő cserében, mint az előző modellben előrejelzett sor.

Az alternatív sorokat az előzőleg minden pozícióra meghatározott két legmagasabb valószínűségű játékos összes kombinációi között keressük. Ez $2^5 = 32$ alternatív sort jelent. A modell minden alternatív sorra, mint a modellhez tartozó prediktormátrix részére lefuttat egy bináris osztályozást. Az osztályozás célváltozója reprezentálja azt, hogy a következő játékmegszakításig lőnek-e gólt a

Alapmodell	**Osztályozási hiba**		
	Teljes adathalmaz	**Tanító adatok**	**Tesztadatok**
Támadó sorok	$0,63$	$0,625$	$0,65$
Védő sorok	$0,547$	$0,541$	$0,572$
Kapus	$0,078$	$0,072$	$0,106$
Összegzés	$0,499$	$0,492$	$\mathbf{0,529}$

3. táblázat. Alapmodell

FO	**Valódi sorösszeállítás**						**Predikció**					
	C	**JSz**	**BSz**	**JH**	**BH**	**K**	**C**	**JSz**	**BSz**	**JH**	**BH**	**K**
1.	11	8	14	19	34	35	15	9	14	7	27	35
2.	15	9	10	7	27	35	15	9	14	19	34	35
3.	11	8	14	19	34	35	15	9	0	7	27	35
4.	15	9	10	7	27	35	15	22	10	19	34	35
5.	15	9	10	7	27	35	15	9	10	7	27	35

4. táblázat. Tanító adatok

FO	**Valódi sorösszeállítás**						**Predikció**					
	C	**JSz**	**BSz**	**JH**	**BH**	**K**	**C**	**JSz**	**BSz**	**JH**	**BH**	**K**
1.	7	41	39	5	21	1	7	8	10	4	23	1
2.	63	8	9	17	32	1	15	8	10	17	32	1
3.	14	16	19	5	21	1	15	9	10	5	21	1
4.	14	8	19	5	21	1	15	16	10	5	21	1
5.	14	8	19	5	21	1	15	9	10	5	21	1

5. táblázat. Tesztadatok

Végső modell	**Osztályozási hiba**		
	Teljes adathalmaz	**Tanító adatok**	**Tesztadatok**
Támadó sorok	$0,468$	$0,449$	$0,547$
Védő sorok	$0,400$	$0,384$	$0,467$
Kapus	$0,018$	$0,005$	$0,073$
Összegzés	$0,37$	$0,337$	$\mathbf{0,434}$

6. táblázat. Végső modell

FO	**Valódi sorösszeállítás**						**Predikció**					
	C	**JSz**	**BSz**	**JH**	**BH**	**K**	**C**	**JSz**	**BSz**	**JH**	**BH**	**K**
1.	11	8	14	19	34	35	11	8	14	7	34	35
2.	15	9	10	7	27	35	15	9	10	7	27	35
3.	11	8	14	19	34	35	11	8	10	7	34	35
4.	15	9	10	7	27	35	22	9	10	7	27	35
5.	15	9	10	7	27	35	15	9	10	7	27	35

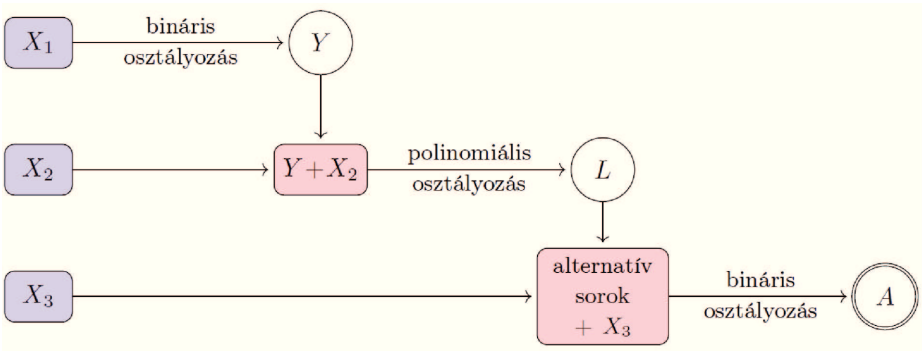
7. táblázat. Tanító adatok

FO	**Valódi sorösszeállítás**						**Predikció**					
	C	**JSz**	**BSz**	**JH**	**BH**	**K**	**C**	**JSz**	**BSz**	**JH**	**BH**	**K**
1.	7	41	39	5	21	1	7	8	10	4	23	1
2.	63	8	9	17	32	1	63	8	9	17	32	1
3.	14	16	19	5	21	1	15	9	10	5	23	1
4.	14	8	19	5	21	1	14	16	19	5	21	1
5.	14	8	19	5	21	1	15	16	19	5	21	1

8. táblázat. Tesztadatok

játékosok. Eredményként minden sorhoz kapunk egy gólszerzési valószínűséget, amelyből ezután kiválasztjuk a legnagyobb valószínűségű sort.

Legyen X_1 az első modell prediktormátrixa, Y a kimeneti mátrixa. Jelölje X_2 és X_3 a második, illetve harmadik modell prediktormátrixát. Jelöljük L-lel a különböző pozíciókhoz tartozó két legmagasabb valószínűségű játékost tartalmazó listát, és legyen A a harmadik modell kimeneti mátrixa. A modell folyamatábrája a következő:



3.3.1. Célváltozó

Legyen $g \in \mathbb{R}^d$ az osztályozás célváltozója, ahol d a bulik száma, $j \in \{1 \dots d\}$. Ekkor:

$$g_j = \begin{cases} 1, & \text{ha a csapat gólt szerez a } j\text{-edik cserében} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases} \tag{9}$$

3.3.2. Független változók

Az alapmodell független változói:

$$x_{i1} = 0, \tag{10}$$

$$x_{ij} = line_{j-1}, j \in \{2, 3, \dots, d\}, \tag{11}$$

ahol $line_j = (l_{1j}, l_{2j} \dots, l_{6j}), \forall j \in \{1 \dots d\}$, ahol l_{ij} az i-edik pozícióhoz tartozó játékos mezszáma (azaz a sorösszeállítás a j-edik buli előtt).

A modell továbbfejlesztéséhez hozzádott változók:

- SH/PP, a 3.1.2-ben megadott változók,
- az előző játékmegszakítás óta eltelt másodpercek száma,
- a játékosok lövési hatékonysága, pontjaik száma (gól + gólpassz), valamint a büntetésperceik száma.

A teljes prediktormátrix:

$$X = \{l_1, l_2, \ldots, l_6, x_1, \ldots, x_m\} = \left(line, \hat{X}\right) \in \mathbb{R}^{d\times(m+6)},$$

ahol d a bulik száma, m a hozzádott független változók száma, $m \geq 0$, és $line$ a (6) egyenlettel megadott változó.

3.3.3. A modell kimenete

Az **osztályozáshoz tartozó kimenet** lehet a gólszerzés valószínűsége, vagy az előrejelzett osztály a c döntési határ mellett, ahol $c \in \mathbb{R}$, $0 \leq c \leq 1$:

$$out_1 = \overline{P} = \left(P\left(g_1 = 1\right), \ldots, P\left(g_d = 1\right)\right), \tag{12}$$

$$out_2 = \overline{G} = \left(\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_d\right), \text{ ahol} \tag{13}$$

$$\overline{g}_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } P\left(g_j = 1\right) \geq c, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}, j \in \{1, \ldots, d\}$$

Jelölje Λ a lehetséges sorok halmazát, Γ a prediktormátrixok halmazát, Π a lehetséges gólszerzési valószínűségek halmazát. Jelölje $F : \Lambda \times \Gamma \to \Pi$ a (12) kimenettel rendelkező osztályozást.

Az alternatív sort előrejelző **modellhez tartozó kimenet** valamely $X' \in \Gamma$ adott prediktormátrix esetén:

$$line^* = \underset{line\in\Lambda}{\operatorname{argmax}}\, F\left(line, X'\right). \tag{14}$$

3.3.4. Példa

Vegyük a 4. bulit a 8. táblázatból. A bulihoz a valóságban a következő sor áll fel:

Valódi sor					
C	**JSz**	**BSz**	**JH**	**BH**	**K**
14	8	19	5	21	1

9. táblázat. A játékosok mezszámai

A második modell a következő játékosokat rendeli hozzá a pozíciókhoz, mint két legvalószínűbb jégrelépőt:

	Valószínűségek			
	#	p_1	#	p_2
Center	14	$0,669$	15	$0,185$
Jobb szélső	16	$0,329$	51	$0,148$
Bal szélső	19	$0,395$	12	$0,143$
Jobb hátvéd	5	$0,814$	4	$0,114$
Bal hátvéd	21	$0,772$	32	$0,130$
Kapus	1	$0,972$	31	$0,028$

10. táblázat. A második modell eredménye

A modell ezután generálja a játékosok összes lehetséges kombinációját. Az alternatív sorokat tartalmazó mátrixot jelölje $line_{12} \in \mathbb{Z}^{32\times 6}$:

$$line_{1,2} = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 19 & 5 & 21 & 1 \\ 14 & 16 & 19 & 5 & 32 & 1 \\ 14 & 16 & 19 & 4 & 21 & 1 \\ 14 & 16 & 19 & 4 & 32 & 1 \\ 14 & 16 & 12 & 5 & 21 & 1 \\ 14 & 16 & 12 & 5 & 32 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

A modell ezután meghatározza a sorokhoz tartozó gólszerzési valószínűségeket:

$$\begin{bmatrix} 14 & 16 & 19 & 5 & 21 & 1 \\ 14 & 16 & 19 & 5 & 32 & 1 \\ 14 & 16 & 19 & 4 & 21 & 1 \\ 14 & 16 & 19 & 4 & 32 & 1 \\ 14 & 16 & 12 & 5 & 21 & 1 \\ 14 & 16 & 12 & 5 & 32 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 15 & 16 & 12 & 5 & 21 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow[\textit{alkalmazása}]{\textit{Osztályozó modell}} \begin{bmatrix} 0.0438 \\ 0.0327 \\ 0.0435 \\ 0.0325 \\ 0.0454 \\ 0.0339 \\ \vdots \\ 0.0457 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

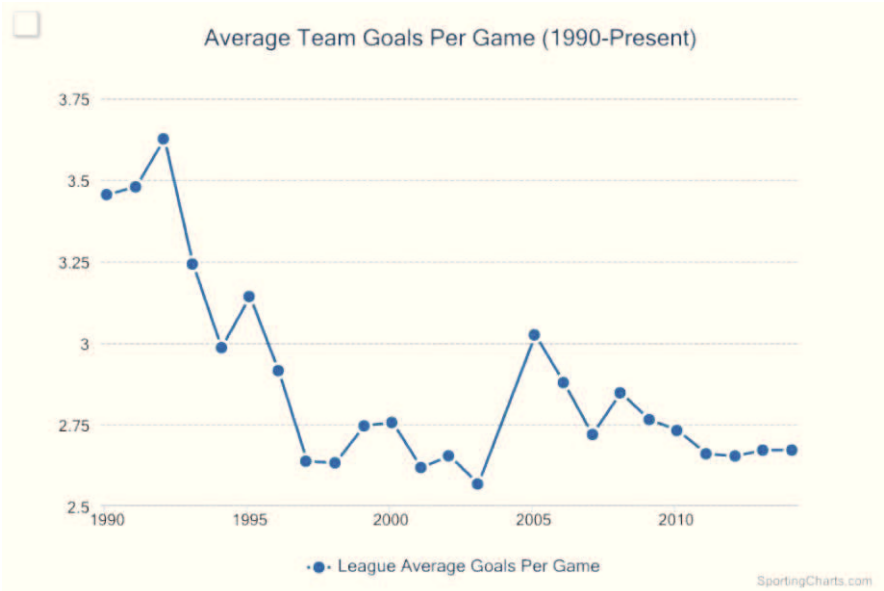
A modell megadja azt a sorösszeállítást, amelyhez a legnagyobb gólszerzési valószínűség tartozik:

Alternatív sor					
C	**JSz**	**BSz**	**JH**	**BH**	**K**
15	16	12	5	21	1

Megjegyzés. A valódi sorhoz tartozó valószínűség 0.0448 volt, tehát az alternatív sor valóban nagyobb valószínűséggel szerez gólt a következő cserében.

3.3.5. A gólprediktor modell kiértékelése

Az osztályozást hasonlóképpen értékeltük, mint az előző két esetben. Az alapmodellből kiindulva fejlesztettük ki a legjobb eredményt adó modellt. A gólok alacsony száma miatt (6. ábra, [9]) nehéz megjósolni, hogy a csapat szerez-e gólt a következő cserében, vagy sem. A gólszerzés valószínűsége nagyon alacsony, ezért az osztályozás a $0,5$-ös döntési határ mellett nagy valószínűséggel minden esetet negatívként osztályozna – azaz a csapat nem lő gólt a következő cserében – ezáltal a modell pontossága nagyon magas lesz, a szenzitivitása viszont nagyon alacsony. Ezt a döntési határ $0,5$-ről 0.06-ra változtatásával próbáltuk kiküszöbölni. Ez ugyan alacsonyabb pontossághoz vezetett, de a szenzitivitzás jelentősen nőtt, így az alapmodell és a végső modell eredményei összehasonlíthatóvá váltak.



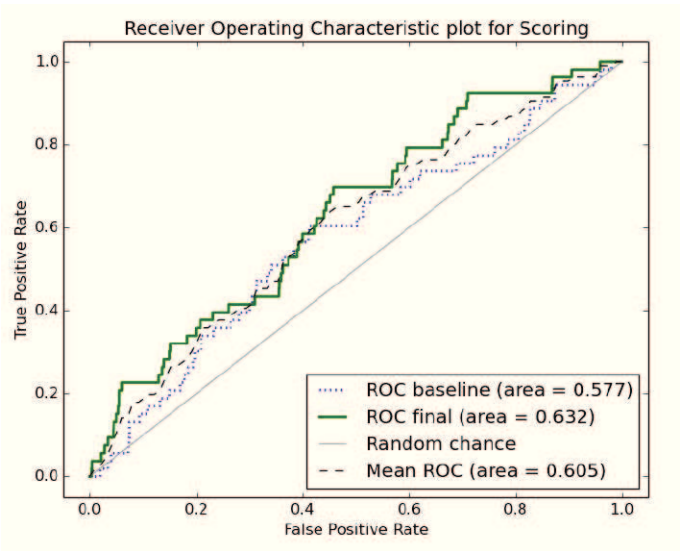
6. ábra. Gól/meccs átlag az NHL-ben

Az alap– és a végső modell esetében is logisztikus regressziót használtunk, a végső modell független változóit a 3.3.2 részben leírtak szerint kibővítettük. A feature selection határát 1-ről 2-re változtattuk.

Az alapmodell ismét nagyon gyenge teljesítményt nyújtott: a tanító adatokon 225-ből mindössze 4 gólt jelzett előre sikeresen, a tesztadatokon 53-ból egyet sem. A végső modellnél a sikeres előrejelzések száma 79 – 16-ra módosult, ezzel a érzékenységet sikerült 0%-ról 30%-ra emelni. Ez továbbra sem számít kiemelkedően jó eredménynek (7. ábra), ám úgy véljük, hogy alkalmasabb prediktor változók segítségével a teljesítmény javítható.

Gólprediktor modell	**A modell teljesítménye**			
	Tanító adatok		**Tesztadatok**	
	Alapmodell	**Végső modell**	**Alapmodell**	**Végső modell**
Tévesztési mátrix	5090 0 221 4	4367 723 146 79	1247 7 53 0	1058 196 37 16
Pontosság	$0,9584$	$0,8365$	$0,9540$	$0,8217$
Érzékenység	$0,0177$	$0,3511$	0	$0,3018$
ROC AUC	$0,59$	$0,63$	$0,57$	$\mathbf{0,62}$

11. táblázat.



7. ábra. A gólprediktor modell ROC-görbéje

3.4. A modell teljesítménye - összegzés

A modell az esetek 74%-ában olyan sort választ ki, amelynek nagyobb a gólszerzési valószínűsége, mint a valóságban jégre küldött sornak. A sorprediktor modell javításával ez az arány megközelíthetné a 100%-ot, mivel ekkor a valóságban felküldött sor gyakrabban szerepelne a 32 alternatív sor között. Így az alternatív sorösszeállítás közelebb állna az edző eredeti elképzeléséhez, aki így komolyabb strukturális változtatások nélkül tudja optimalizálni a csapatot játék közben.

Természetesen a javítások sem garantálják, hogy a modell hosszú távon valóban növeli a csapat által lőtt gólok számát, ezt kizárólag élő tesztekkel igazolhatnánk.

Szeretném kifejezni őszinte hálámat dr. Tóth Jánosnak, aki már a kezdetektől rengeteg támogatást nyújtott, és aki nélkül ez a cikk nem valósulhatott volna meg, továbbá szeretném megköszönni Kangyal Balázsnak, a Magyar Jégkorong Szövetség sportigazgatójának, korábbi válogatott játékosnak és jelenleg aktív edzőnek a szakmai segítséget, és a modellfejlesztést elősegítő ötleteket. A dolgozat részben a K 84060 sz. OTKA pályázat támogatásával készült.

Hivatkozások

[1] T. Fawcett: *An Introduction to ROC Analysis, Pattern Recognition Letters*, **27** (2006)

[2] D.W. Hosmer: *Applied Logistic Regression* (2nd edition), Lemeshow, Stanley (2000).

[3] J.R. Quinlan: *C4.5: Programs for Machine Learning*, M. Kaufmann, (1993).

[4] L. Breiman, J. Friedman, R. Olshen, and C. Stone: *Classification and Regression Trees*, Wadsworth, Belmont, CA, (1984).

[5] T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman: *Elements of Statistical Learning*, Springer, (2009).

[6] C.M. Bishop: *Pattern Recognition and Machine Learning*, 657–663.

[7] R.P. Schumaker, O.K. Solieman, H. Chen: *Sports Data Mining*, Springer US, (2010).

[8] `http://en.wikipedia.org/wiki/Receiver_operating_characteristic`

[9] `http://www.sportingcharts.com/nhl/`

(Beérkezett: 2015. április 21.)

SÜDY BARBARA
BME Analízis Tanszék
1111 Budapest, Egry J. u. 1.

REAL-TIME OPTIMIZATION OF ICE HOCKEY TEAMS

Barbara Südy

The goal of this paper is to introduce a novel data-driven approach for in-game decision making in ice hockey. Using predictive data mining techniques we build a model which attempts to determine the optimal team structure of an ice hockey team for the upcoming shift. The model gives the coach feedback on the optimal line combination in real time. The predictions of the model are based on the time series data that arises from the past game events.

Alkalmazott Matematikai Lapok **32** (2015), 63–77.

MÉRTÉKEK ABSZOLÚT ÉS SZIMMETRIKUS NORMÁKON

LOVAS ATTILA, ANDAI ATTILA

Dolgozatunkban az abszolút és szimmetrikus véletlen normákkal ismertetjük meg az Olvasót. Definiáljuk a normafolyamatot mint speciális sztochasztikus folyamatot, és megmutatjuk, hogy a normafolyamatok szoros kapcsolatban állnak az abszolút és szimmetrikus véletlen normákkal. Egy folytonos idejű egyszerű ugró folyamatot leíró Markov-lánc segítségével konstruálunk egy abszolút és szimmetrikus véletlen normát. Definiáljuk ezen véletlen normák magasabb dimenziós erős és gyenge kiterjesztéseit, továbbá numerikusan kiszámítjuk a konstruált véletlen norma várható értékeként előálló norma egységgömbjét kettő és három dimenzióban.

1. Bevezetés

A normák és az általuk indukált metrikák központi szerepet töltenek be az analízisben. Egy $||.|| : \mathbb{C}^n \to [0, \infty)$ normát a $\mathbb{C}^n$ vektortéren *abszolútnak* nevezünk, ha a vektorok normája csupán elemeik abszolút értékétől függ, azaz

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad ||x|| = ||\,|x|\,||,$$

ahol $|.|$ jelöli a vektor elemenként vett abszolút értékét. Egy normát *szimmetrikusnak* mondunk, ha az alábbi feltételt teljesíti

$$\forall \pi \in S_n \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \quad ||x \circ \pi|| = ||x||,$$

ahol S_n az n-ed rendű szimmetrikus csoportot jelöli. Világos, hogy az analízisben oly gyakran felbukkanó p-normák rendelkeznek a fenti tulajdonságokkal.

Az is nyilvánvaló, hogy egy abszolút és szimmetrikus normát egyértelműen meghatároznak az

$$\mathbb{R}^n_{+,\geq} := \{(x_1, \ldots, x_n) | x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0\}$$

halmazon felvett értékei [2]. Megállapodunk abban, hogy kizárólag olyan normákat fogunk tekinteni, melyek normáltak abban az értelemben, hogy teljesítik a $||(1, 0, 0, \ldots, 0)|| = 1$ *normálási feltételt.*

1.1. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező. Egy $p : \Omega \times \mathbb{C}^n \to [0, \infty)$ leképezést *abszolút és szimmetrikus véletlen normának* nevezünk, ha az a következő feltételeket teljesíti:

(i) A $p(\omega, .) : \mathbb{C}^n \to [0, \infty)$ függvény abszolút és szimmetrikus norma $\mathbb{P}$-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén.

(ii) $\forall x \in \mathbb{C}^n \quad p(., x) : \Omega \to [0, \infty)$ egy valószínűségi változó.

A permutáció invarianciából, a normálási feltételből és abból, hogy a norma abszolút, könnyen levezethető, hogy

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \text{esetén} \quad \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,|p(\omega, x) \notin [||x||_\infty, ||x||_1]\}) = 0 \tag{1}$$

teljesül, és az $x \mapsto \mathbb{E}(p(., x))$ hozzárendelés abszolút és szimmetrikus normát határoz meg.

A dolgozat a következőképpen épül fel: A második fejezet három alfejezetre oszlik. A 2.1 és 2.2 alfejezetekben definiáljuk a normafolyamatokat és a normafolyamatok pályaintegrál reprezentációját. A 2.3 alfejezetben bevezetjük a Markov-típusú abszolút és szimmetrikus véletlen normákat.

A harmadik fejezet első felében folytonos idejű Markov-láncok pályaintegráljának kiszámításával foglalkozunk. A harmadik fejezet második felében megkonstruálunk egy konkrét Markov-típusú abszolút és szimmetrikus véletlen normát.

A negyedik fejezetet a magasabb dimenziós általánosításoknak szenteljük. A fejezet egy, a végtelen dimenziós kiterjesztések ekvivalenciájára irányuló nyitott kérdéssel zárul.

Az itt bemutatásra kerülő eredmények angol nyelven is olvashatók [1].

2. Abszolút és szimmetrikus véletlen normák a síkon

2.1. Normafolyamatok

Egy $\mathbb{R}^2_{+,\geq}$-re megszorított szimmetrikus abszolút norma megadható az egységgömbjével, ami pedig paraméterezhető a rajta fekvő pontok y koordinátái segítségével. Ez a megfigyelés motiválja a következő definíciót.

2.1. Definíció. Egy $(X_t)_{t\geq 0}$ valós értékű sztochasztikus folyamatot *normafolyamatnak* nevezünk, ha a realizációi a következő feltételeket teljesítik $\mathbb{P}$-m.b.:

(i) $X_0 = 0$,

(ii) $\forall\, 0 \leq t_1 < t_2 \quad \text{esetén} \quad 0 \leq \dfrac{X_{t_2} - X_{t_1}}{t_2 - t_1} \leq 1$,

(iii) $t \mapsto X_t$ konvex és folytonos.

Az alábbi tétel szerint a normafolyamatokra tekinthetünk úgy is, mint az $\mathbb{R}^2_{+,\geq}$-re megszorított abszolút és szimmetrikus véletlen normák egységgömbjének paraméterezésére.

2.1. Tétel. *Legyen $(X_t)_{t\geq 0}$ egy tetszőleges normafolyamat és $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a hozzátartozó valószínűségi mező.*

Ekkor $\mathbb{P}$-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén igaz, hogy minden $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_{+,\geq} \setminus \{(0,0)\}$ vektorhoz egyértelműen létezik $p \in [||v||_\infty, ||v||_1]$ úgy, hogy

$$\frac{v_1}{p} + X_{\frac{v_2}{p}}(\omega) = 1$$

teljesül és a $p : \Omega \times \mathbb{R}^2_{+,\geq} \setminus \{(0,0)\} \to [0,\infty)$ – $\mathbb{P}$-m.m. $\omega \in \Omega$-ra értelmezett – függvény $p(\{0,0\}) := 0$ módon definiált kiterjesztése abszolút és szimmetrikus véletlen norma.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\omega \in \Omega$-ra a 2.1. Definícióban szereplő (i)–(iii) feltételek teljesülnek. Legyen $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_{+,\geq} \setminus \{(0,0)\}$ egy tetszőleges vektor. A $(0,\infty) \ni p \mapsto \frac{v_1}{p} + X_{\frac{v_2}{p}}(\omega)$ hozzárendelés folytonos és szigorú monoton csökkenő függvényt határoz meg. Továbbá

$$\frac{v_1}{v_1} + X_{\frac{v_2}{v_1}}(\omega) \geq 1$$
$$\frac{v_1}{v_1+v_2} + X_{\frac{v_2}{v_1+v_2}}(\omega) \leq 1$$

is teljesül, mert $0 \leq X_t \leq t$. Ebből következik, hogy egyértelműen létezik olyan $p \in [||v||_\infty, ||v||_1]$, amelyre $\frac{v_1}{p} + X_{\frac{v_2}{p}}(\omega) = 1$ teljesül.

Most vegyük p kiterjesztettjét, és $\omega \in \Omega$ legyen olyan, mint fent volt.

(i) $\forall v \in \mathbb{R}^2_{+,\geq}\ p(\omega, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$, hiszen $p(\omega, v) \in [||v||_\infty, ||v||_1]$.

(ii) $\forall \alpha > 0\ \dfrac{\alpha v_1}{p(\omega, \alpha v)} + X_{\frac{\alpha v_2}{p(\omega,\alpha v)}} = 1$, ezért $p(\omega, \alpha v) = \alpha p(\omega, v)$.

(iii) Ha $v, w \in \mathbb{R}^2_{+,\geq}$ nem nulla vektorok, akkor a $t \mapsto X_t(\omega)$ függvény konvexitása miatt írhajuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 = \frac{v_1 + w_1}{p(\omega, v) + p(\omega, w)} &+ \frac{p(\omega, v)}{p(\omega, v) + p(\omega, w)} X_{\frac{v_2}{p(\omega,v)}} + \\ &+ \frac{p(\omega, w)}{p(\omega, v) + p(\omega, w)} X_{\frac{w_2}{p(\omega,w)}} \geq \\ &\geq \frac{v_1 + w_1}{p(\omega, v) + p(\omega, w)} + X_{\frac{v_2+w_2}{p(\omega,v)+p(\omega,w)}}, \end{aligned}$$

amiből $p(\omega, v + w) \leq p(\omega, v) + p(\omega, w)$ következik.

Azt kaptuk, hogy ha $\omega \in \Omega$ teljesíti a 2.1. Definícióban szereplő $(i) - (iii)$ feltételeket, akkor $p(\omega, .) : \mathbb{R}^2_{+,\geq} \to [0,\infty)$ abszolút és szimmetrikus normát határoz meg.

Legyen $v \in \mathbb{R}^2_{+,\geq}$ egy tetszőleges vektor és $y \in (0, \infty)$. Ekkor írhatjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(p\left(.,v\right) < y\right) = \mathbb{P}\left(\frac{v_1}{y} + X_{\frac{v_2}{y}} < 1\right) = \mathbb{P}\left(X_{\frac{v_2}{y}} < 1 - \frac{v_1}{y}\right),$$

amiből következik, hogy $p\left(.,v\right) : \Omega \to [||v||_\infty, ||v||_1]$ egy valószínűségi változó. $\square$

Ha $y \in [||v||_\infty, ||v||_1]$, akkor

$$0 \leq \frac{v_2}{y} \leq \frac{v_2}{v_1 + v_2} \leq 1 \quad \text{és} \quad 0 \leq 1 - \frac{v_1}{y} \leq 1 - \frac{v_1}{v_1 + v_2} \leq 1$$

teljesül. Következésképpen elegendő a

$$(t, x) \mapsto \mathbb{P}\left(X_t(.) < x\right)$$

függvény értékeit a $[0,1]^2$ egységnényzeten meghatározni ahhoz, hogy a véletlen norma eloszlását meghatározzuk.

Az abszolút és szimmetrikus véletlen normák és a normafolyamatok között fennálló fenti megfeleltetés nem kölcsönösen egyértelmű, mert a véletlen norma nem határozza meg egyértelműen az őt származtató normafolyamatot. Mindazonáltal a normafolyamatok ideális jelöltek arra, hogy segítségükkel konkrét abszolút és szimmetrikus véletlen normákat konstruáljunk.

2.2. Normafolyamatok reprezentációi

Láttuk, hogy a normafolyamatok szoros kapcsolatban állnak az abszolút és szimmetrikus véletlen normákkal, ezért érdemes a normafolyamatok reprezentációit vizsgálni. Tudjuk, hogy egy folytonos és monoton növő függvény majdnem mindenütt differenciálható és előáll úgy, mint a majdnem mindenütt létező deriváltjának az integrálfüggvénye [4]. Ha ezt a tételt alkalmazzuk az $(X_t)_{t\geq 0}$ folyamat pályáira, akkor azt kapjuk, hogy létezik olyan $(Z_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamat, amelyre

$$X_t(.) \overset{\mathbb{P}\text{-m.b.}}{=} \int_0^t Z_s(.)\,\mathrm{d}s$$

teljesül, és nyilvánvaló az is, hogy a $(Z_t)_{t\geq 0}$ folyamat relaizációi majdnem biztosan nem negatív, monoton növő, korlátos függvények, 1 felső korláttal.

A $(Z_t)_{t\geq 0}$ folyamat tehát felírható

$$(Z_t)_{t\geq 0} = (\tilde{F} \circ Y_t)_{t\geq 0}$$

alakban is, ahol $(Y_t)_{t\geq 0}$ egy $\mathbb{P}$-m.b. növekvő pályájú sztochasztikus folyamat egy $(S, \leq)$ részben rendezett metrikus téren, $\tilde{F} : S \to [0,1]$ pedig egy monoton növő

függvény. Ezért

$$X_t(.) \overset{\mathbb{P}\text{-m.b.}}{=} \int_0^t \tilde{F} \circ Y_s(.)\,\mathrm{d}s.$$

A fenti pályaintegrál leírásból rövid számolással eljuthatunk egy újabb reprezentációhoz. Ha feltesszük, hogy $\tilde{F}$ egy $(\Lambda, \mathcal{G}, \tilde{\mathbb{P}})$ valószínűségi mezőn értelmezett $\xi \in S$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye és tekintjük a $(Y_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamatot a ξ-től függetlenül, akkor írható, hogy

$$X_t(.) \overset{\mathbb{P}\text{-m.b.}}{=} \int_0^t \tilde{F} \circ Y_s(.)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \tilde{\mathbb{P}}(\xi < Y_s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \int_\Lambda 1_{\xi(\eta)<Y_s(.)}\,\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}(\eta)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_\Lambda \int_0^t 1_{\xi(\eta)<Y_s(.)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}(\eta) = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left((t - \tau_\xi(.))_+\right),$$

ahol τ_r az $S \ni r$ szint elérési ideje: $\tau_r = \inf\{s \geq 0 | Y_s \geq r\}$.

2.3. Markov-típusú abszolút és szimmetrikus véletlen normák

2.2. Definíció. Egy abszolút és szimmetrikus véletlen normát *Markov-típusúnak* nevezünk, ha van olyan normafolyamat, amely a szóban forgó véletlen normát származtatja, és ezen normafolyamat pályái Markov-folyamatok pályáinak integrálfüggvényeként állnak elő.

A Markov típusú abszolút és szimmetrikus véletlen normák sem nem túl triviálisak, sem nem túl bonyolultak ahhoz, hogy viselkedésüket legalább véges állapottér esetén meg tudjuk érteni.

Mielőtt továbblépnénk, csupán a teljesség kedvéért néhány elemi tényt ismertetünk a folytonos idejű véges állapotterű Markov-láncokkal kapcsolatban [3].

2.3. Definíció. Egy $(Y_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamatot folytonos idejű Markovláncnak nevezünk, ha egy S megszámlálható állapottéren veszi fel értékeit és memória nélküli, ami azt jelenti, hogy

$$\mathbb{P}\left(Y_t = \beta \,|Y_{t_1} = \alpha_1, \ldots Y_{t_n} = \alpha_n\right) = \mathbb{P}\left(Y_t = \beta \,|Y_{t_1} = \alpha_1\right)$$

teljesül minden $0 < t_1, \ldots, t_n < t$-re és minden $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in S$-re.

Továbbá létezik egy $P : [0, \infty) \to \mathbb{R}^S \times \mathbb{R}^S$ leképezés, amelyre fennáll, hogy

$$\forall t \in [0, \infty) \quad \forall \alpha, \beta \in S \quad \mathbb{P}\left(Y_t = \beta \,|Y_0 = \alpha\right) = P(t)_{\alpha\beta}$$

és P az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

(i) $P(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^S}$

(ii) $\exists \lim_{t \searrow 0} P(t) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^S}$

(iii) $P(t+s) = P(t)P(s)\ \forall t, s \in [0, \infty)$.

A $P(t)$ mátrixot a t időponthoz tartozó átmenet-valószínűség mátrixnak nevezzük.

A 4. Definícióban szereplő (i)–(iii) feltételekből következik, hogy létezik olyan $G \in \mathbb{R}^S \times \mathbb{R}^S$ mátrix, melyre $P(t) = e^{tG}$ módon áll elő. Ezt a G mátrixot nevezzük a folytonos idejű Markov-lánc infitezimális generátorának [3].

3. Konkrét példa abszolút és szimmetrikus véletlen normára

3.1. Folytonos idejű Markov-láncok pályaintegrálja

Ebben a pontban folytonos idejű Markov-láncok pályaintegrálját vizsgáljuk. Pollett and Stefanov közölt egy lehetséges eljárást folytonos idejű Markov-lánc pályaintegrál eloszlásfüggvényének kiszámítására [7]. A következő tétel tekinthető a híres Feynman–Kac-formula [6] variánsaként véges állapotterű és folytonos idejű Markov-láncokra. Ez az eszköztár teszi lehetővé, hogy a konstruált Markov-típusú abszolút és szimmetrikus véletlen norma eloszlását kiszámítsuk.

3.1. Tétel. *Legyen $(Y_t)_{t\geq 0}$ egy folytonos idejű Markov-lánc G infinitezimális generátorral a véges S állapottéren, $f : S \to \mathbb{R}$ pedig legyen egy injektív függvény. Ha $(X_t)_{t\geq 0}$ jelöli $f \circ Y$ pályaintegrál folyamatát:*

$$X_t = \int_0^t f \circ Y_s \, \mathrm{d}s,$$

akkor X_t karakterisztikus függvénye a következőképpen fejezhető ki:

$$(\forall y_0 \in S) \quad \mathbb{E}\left(e^{iuX_t} \,|Y_0 = y_0\right) = e^{t(G+iuM_f)}(\mathbf{1})(y_0), \tag{2}$$

ahol $\mathbf{1} : S \to \{1\}$ a konstans 1 függvény, és $M_f : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S$ az f függvénnyel való szorzás operátora.

Bizonyítás. A $t \mapsto f(Y_t(\omega))$ hozzárendelés lépcsős függvényt határoz meg minden $\omega \in \Omega$ esetén, ezért $t \mapsto f(Y_t(\omega))$ integrálja Riemann-féle közelítő összegek határértékeként is előáll. Ezt és Lebesgue dominált konvergencia tételét alkal-

mazva a következőket írhatjuk.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{iuX_t}\,|Y_0=y_0\right) &= \mathbb{E}\left(\exp\left(iu\lim_{m\to\infty}\frac{t}{m}\sum_{k=1}^{m}f\left(Y_{\frac{kt}{m}}\right)\right)\middle|\,Y_0=y_0\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\mathbb{E}\left(\exp\left(iu\frac{t}{m}\sum_{k=1}^{m}f\left(Y_{\frac{kt}{m}}\right)\right)\middle|\,Y_0=y_0\right)\end{aligned}$$

Az f függvény injektivitását és az $(Y_t)_{t\geq 0}$ folyamat Markov-tulajdonságát felhasználva adódik, hogy

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\exp\left(iu\frac{t}{m}\sum_{k=1}^{m}f\left(Y_{\frac{kt}{m}}\right)\right)\middle|\,Y_0=y_0\right)=\\ &=\sum_{y_1,\ldots,y_m\in S}\exp\left(iu\frac{t}{m}\sum_{k=1}^{m}f(y_k)\right)\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m}\left\{f\left(Y_{\frac{kt}{m}}\right)=f(y_k)\right\}\middle|\,Y_0=y_0\right)\\ &=\sum_{y_1,\ldots,y_m\in S}\prod_{k=1}^{m}e^{\frac{iut}{m}f(y_k)}\mathbb{P}\left(Y_{\frac{kt}{m}}=y_k\middle|\,Y_{\frac{(k-1)t}{m}}=y_{k-1}\right).\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a kapott kifejezés felírható úgy is, mint az $e^{\frac{t}{m}G}e^{\frac{iu}{m}M_f}$ operátor m-szeres kompozíciójának hatása az $\mathbf{1}$ függvényre.

$$\sum_{y_1,\ldots,y_m\in S}\prod_{k=1}^{m}e^{\frac{iut}{m}f(y_k)}\mathbb{P}\left(Y_{\frac{kt}{m}}=y_k\middle|\,Y_{\frac{(k-1)t}{m}}=y_{k-1}\right)=\left(e^{\frac{t}{m}G}e^{\frac{iut}{m}M_f}\right)^m(\mathbf{1})(y_0)$$

Ha $m\to\infty$ határértéket veszünk és alkalmazzuk a Lie–Trotter-formulát, akkor a kívánt kifejezést kapjuk.

$$\mathbb{E}\left(e^{iuX_t}\,|Y_0=y_0\right)=\lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{t}{m}G}e^{\frac{iut}{m}M_f}\right)^m(\mathbf{1})(y_0)=e^{t(G+iuM_f)}(\mathbf{1})(y_0)$$

□

Vezessük be az alábbi jelöléseket a fenti feltételes karakterisztikus függvényre és a neki megfelelő feltételes eloszlásfüggvényre.

$$\begin{aligned}\varphi(t,u)&=\mathbb{E}\left(e^{iuX_t}\,|Y_0\right)\\ F(t,x)&=\mathbb{P}\left(X_t<x\,|Y_0\right)\end{aligned}$$

Ha a (2) kifejezés t-szerinti deriváltját vesszük, akkor azt kapjuk, hogy φ a következő Cauchy-feladat megoldása:

$$\begin{aligned}\partial_1\varphi&=G\varphi+iuM_f\varphi\\ \varphi(0,u)&=\mathbf{1}\in\mathbb{R}^S.\end{aligned}\tag{3}$$

Legyen ξ egy X_t-től független normális eloszlású valószínűségi változó zérus várható értékkel és σ szórással. Az $X_t + \xi$ simított valószínűségi változó φ_σ-val jelölt karakterisztikus függvénye a (3)-hoz hasonló differenciálegyenlet- rendszernek tesz eleget.

$$\begin{aligned} \partial_1 \varphi_\sigma &= G\varphi_\sigma + M_f iu\varphi_\sigma \\ \varphi(0,u) &= e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \mathbf{1} \in \mathbb{R}^S \end{aligned}$$

Tegyük fel egy pillanatra, hogy $\partial_1 F_\sigma(t,x)$ létezik, és minden $t \in [0,\infty)$ esetén eltűnik, amint $x \to -\infty$. Ekkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \partial_1 \varphi_\sigma(t,u) &= \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iux}\, F_\sigma(t,\mathrm{d}x) = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iux} \int\limits_{[0,t]} \partial_1 F_\sigma(s,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{[0,t]} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iux}\, \partial_1 F_\sigma(s,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iux}\, \partial_1 F_\sigma(t,\mathrm{d}x), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}} iue^{iux}\, F_\sigma(t,\mathrm{d}x) &= -\partial_2 F_\sigma(t,x) e^{iux}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \int\limits_{\mathbb{R}} iue^{iux}\, F_\sigma(t,\mathrm{d}x) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} -e^{iux}\, \partial_2 F_\sigma(t,\mathrm{d}x), \end{aligned} \tag{4}$$

amiből következik, hogy a $\partial_1 F_\sigma - GF_\sigma + M_f \partial_2 F_\sigma$ függvényhez asszociált előjeles Borel-mérték Fourier–Stieltjes-transzformáltja zérus, azaz

$$\forall t \in [0,\infty),\ \forall u \in \mathbb{R} \quad \text{esetén} \quad \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iux}\, \left[\partial_1 F_\sigma - GF_\sigma + M_f \partial_2 F_\sigma\right](t,\mathrm{d}x) = 0.$$

Másfelől pedig

$$\forall t \in [0,\infty) \text{ -re} \quad \lim_{x \to -\infty} \left[\partial_1 F_\sigma - GF_\sigma + M_f \partial_2 F_\sigma\right](t,x) = 0,$$

amiből következik, hogy F_σ a következő Cauchy-feladat megoldása

$$\begin{aligned} \partial_1 F_\sigma &= GF_\sigma - M_f \partial_2 F_\sigma \\ F_\sigma(0,x) &= \Phi_\sigma(x)\mathbf{1} \in \mathbb{R}^S, \end{aligned} \tag{5}$$

ahol Φ_σ jelöli ξ eloszlásfüggvényét.

Megjegyzés. Az X integrál előállításából az alábbi becslést kapjuk

$$X_t + \xi + m\Delta t \le X_{t+\Delta t} + \xi \le X_t + \xi + M\Delta t,$$

ahol $m = \min_{s\in S} f(s)$ és $M = \max_{s\in S} f(s)$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$F_\sigma(t, x - M\Delta t) \le F_\sigma(t + \Delta t, x) \le F_\sigma(t, x - m\Delta t),$$

ami felhasználható arra, hogy F_σ parciális deriváltjait a differenciahányadosokon keresztül az alábbi módon megbecsüljük:

$$\begin{aligned} -M\frac{F_\sigma(t,x) - F_\sigma(t, x - M\Delta t)}{M\Delta t} \le & \frac{F_\sigma(t + \Delta t, x) - F_\sigma(t,x)}{\Delta t} \\ \le & - m\frac{F_\sigma(t,x) - F_\sigma(t, x - m\Delta t)}{m\Delta t} \end{aligned}$$

(a $\le$ szimbólum elemenkénti relációt jelöl). Az $\partial_1 F_\sigma(t,x)$ parciális deriváltra a következő becslést kapjuk

$$-M\partial_2 F_\sigma(t,x) \le \partial_1 F_\sigma(t,x) \le -m\partial_2 F_\sigma(t,x),$$

amiből következik, hogy a $\lim_{x\to\infty} \partial_1 F_\sigma(t,x) = 0$ feltétel elhagyható. Az $X_t + \xi$ valószínűségi változó gyengén tart X_t-hez, amint $\sigma \to 0$, ezért elég megoldani a (5) Cauchy-feladatot, és venni a $\sigma \to 0$ határértéket, hogy meghatározzuk F értékét annak folytonossági pontjaiban. A következő tétel az F eloszlásfüggvény egy integrálegyenlet előállítását adja meg.

3.2. Tétel. *Ha $(X_t)_{t\ge 0}$ a 3.1. Tételben definiált sztochasztikus folyamat, akkor tetszőleges $y_0 \in S$ esetén az $F(t,x)_{y_0} = \mathbb{P}\left(X_t < x \,|Y_0 = y_0\right)$ feltételes eloszlásfüggvény a következő integrálegyenlet megoldásaként kapható meg:*

$$\begin{aligned} F(t,x)_{y_0} &= e^{-t\lambda}\mathbf{1}(x \ge tf(y_0)) + \\ &+ \int_0^t \sum_{\sigma\in S\setminus\{y_0\}} F(s, x - (t-s)f(y_0))_\sigma \mathbb{P}\left(Y_{t-s} = \sigma \,|Y_0 = y_0\right) \lambda e^{-\lambda(t-s)}\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{6}$$

ahol az Y_s folyamat által az egyes állapotokban töltött idő λ parameterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Bizonyítás. Jelöljük az Y Markov-lánc első ugrásának idejét τ-val. Alkalmazva a teljes valószínűség tételét

$$\begin{aligned} F(t,x)_{y_0} = & \mathbb{P}\left(X_t < x \,|Y_0 = y_0, \tau \ge t\right) \mathbb{P}\left(\tau \ge t\right) + \\ & + \int_0^t \mathbb{P}\left(X_t < x \,|Y_0 = y_0, \tau = t - s\right) \lambda e^{-\lambda(t-s)}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

írható, hiszen τ a kezdeti állapottól független. Azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(X_t < x \,|Y_0 = y_0, \tau \ge t\right) = \mathbf{1}(x - tf(y_0) \ge 0).$$

Hasonlóan kapható meg az is, hogy

$$\mathbb{P}\left(X_t < x \,|Y_0 = y_0, \tau = t - s\right) =$$
$$= \sum_{\sigma \in S \setminus \{y_0\}} \mathbb{P}\left(X_t < x \,|Y_0 = y_0, Y_{t-s} = \sigma, \tau = t - s\right) \mathbb{P}\left(Y_{t-s} = \sigma \,|Y_0 = y_0\right),$$

ami minden $s \in [0, t)$ esetén igaz, továbbá az $(Y_t)_{t \geq 0}$ folyamat Markov tulajdonsága miatt

$$\mathbb{P}\left(X_t < x \,|Y_0 = y_0, Y_{t-s} = \sigma, \tau = t - s\right) = F(s, x - (t-s)f(y_0))_\sigma$$

írható. □

3.2. Abszolút szimmetrikus véletlen norma konstrukciója

Vegyük azt az $(Y_t)_{t \geq 0}$ folytonos idejű Markov-láncot az $S = \{0, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ állapottéren, melynek infinitezimális generátora $G = \lambda_n N \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, ahol

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

és a $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paraméter szabályozza a lánc „sebességét”. Az előző pontban ismertetett módon kiszámítjuk az

$$X_t = \int_0^t \frac{1}{n} Y_s \, \mathrm{d}s$$

pályaintegrál folyamat eloszlásfüggvényét. Minden, legfeljebb n szakaszból álló, szakaszonként lineáris pályájú normafolyamat pályája szerepel az X_t pályái között, így X_t egy mértéket ad meg azon abszolút és szimmetrikus véletlen normákon, melyek egységgömbje egy legfeljebb $4n$ oldalú szabályos sokszög.

A simított valószínűségi változóhoz tartozó Cauchy-feladat felírható úgy, mint

$$\partial_1 (F_\sigma)_k + \frac{k}{n} \partial_2 (F_\sigma)_k + \lambda_n (F_\sigma)_k = \lambda_n (F_\sigma)_{k+1}$$
$$\partial_1 (F_\sigma)_n + \frac{k}{n} \partial_2 (F_\sigma)_n + \lambda_n (F_\sigma)_n = 0$$
$$(F_\sigma)_k (0, x) = \Phi_\sigma(x),$$

ahol $(F_\sigma)_k = \mathbb{P}(X_t + \xi < x | Y_0 = k)$ és $k = 0, \dots, n$. Ha $(F_\sigma(t,x))_k$ helyére $e^{-t\lambda_n}(J_\sigma(t,x))_k$-t írunk, akkor a következő elsőrendű kvázilineáris parciális differenciálegyenlet rendszert nyerjük:

$$\begin{aligned} \partial_1 (J_\sigma)_k + \frac{k}{n}\partial_2 (J_\sigma)_k &= \lambda_n (J_\sigma)_{k+1} \\ \partial_1 (J_\sigma)_n + \frac{k}{n}\partial_2 (J_\sigma)_n &= 0 \\ (J_\sigma)_k(0,x) &= \Phi_\sigma(x). \end{aligned} \tag{7}$$

A fenti egyenlet közvetlenül megoldható a karakterisztikák módszerével, így egy rekurziót kapunk F_σ-ra:

$$\begin{aligned} (F_\sigma)_n(t,x) &= \Phi_\sigma(x-t) \\ (F_\sigma)_k(t,x) &= e^{-t\lambda_n}\Phi_\sigma\left(x - \frac{k}{n}t\right) + \int_0^t (F_\sigma)_{k+1}\left(t, x - \frac{k}{n}(t-s)\right)\lambda_n e^{-\lambda_n(t-s)}\,\mathrm{d}s \\ & k = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

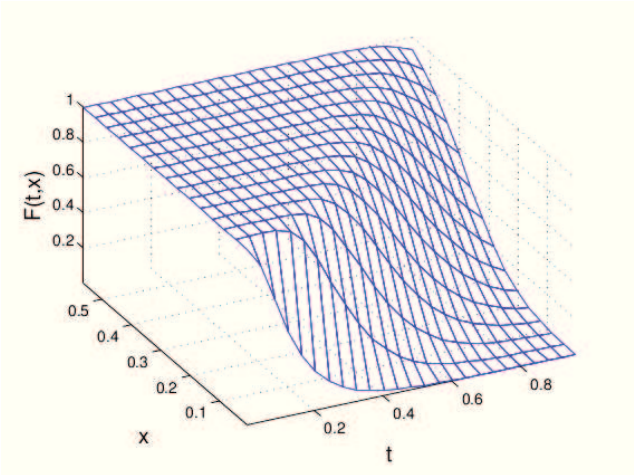
Ha $\sigma \to 0$ az adódik, hogy

$$\begin{aligned} (F)_n(t,x) &= \mathbf{1}(x - t \geq 0) \\ (F)_k(t,x) &= e^{-t\lambda_n}\mathbf{1}\left(x - \frac{k}{n}t \geq 0\right) + \int_0^t (F)_{k+1}\left(t, x - \frac{k}{n}(t-s)\right)\lambda_n e^{-\lambda_n(t-s)}\,\mathrm{d}s \\ & k = 0, \dots, n-1, \end{aligned}$$

ami ugyanaz, mintha az (6) formulát közvetlenül alkalmaztuk volna.

A (7) differenciálegyenlet-rendszert $\sigma = 0$-ra, numerikusan az upwind séma [5] segítségével oldottuk meg. A kapott eloszlásfüggvény segítségével a konstruált abszolút szimmetrikus véletlen norma várható értékét számítottuk ki, ami persze egy abszolút és szimmetrikus norma. Szimulációinkban a $[0,1]$ intervallumot N belső ponttal $N+1$ egyenlő részre osztottuk fel. Az $n = 10$, $\lambda_n = 10$ és $N = 200$ paraméter beállítások mellett kapott $(F)_0(t,x)$ eloszlásfüggvény grafikonja az . ábrán látható.

A várható érték norma $\mathbb{R}^2$-n vett egységköreit a . ábrán ábrázoltuk. Két szélsőséges vislekedés figyelhető meg: Ha leállítjuk a láncot, azaz ha $\lambda_n = 0$, akkor a várható érték norma a közönséges maximum normával esik egybe. Ha a lánc sebessége végtelenhez tart, vagyis $\lambda_n \to \infty$, akkor a várható érték norma az 1-normához tart pontonként.



1. ábra. Az X_t valószínűségi változó eloszlásfüggvénye ($n = 10$, $\lambda_n = 10$, $N = 200$).

4. Abszolút és szimmetrikus normák magasabb dimenziós terekben

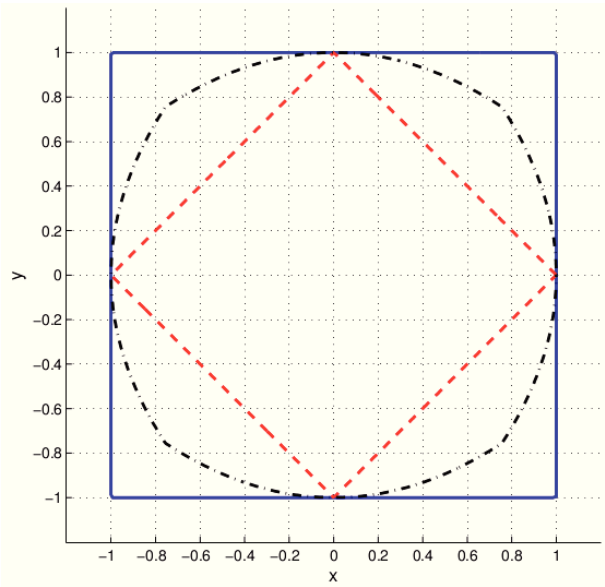
4.1. Erős és gyenge kiterjesztések

A közönséges p-normák teljesítik a $||v||_p = ||\,(v_1, ||(v_2, \ldots, v_n)||)\,||_p$ egyenlőséget $\forall v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ estén. Ezt a tulajdonságot felhasználhatjuk arra, hogy a síkon megkonstruált abszolút és szimmetrikus véletlen normáinkat magasabb dimenziós terekre induktívan általánosítsuk.

Tegyük fel, hogy minden n-nél kisebb dimenziójú térre sikerült kiterjeszteni a síkon már megkonstruált abszolút és szimmetrikus véletlen normát. Legyen $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{+,\geq}$ tetszőleges vektor és $\overset{(n-1)}{p}$ a véletlen norma $\mathbb{C}^{n-1}$ térre vett kiterjesztése. Legyen p egy, az előző kiterjesztéstől független norma a $\mathbb{C}^2$ vektortéren és definiáljuk az n dimenziós kiterjesztést úgy, mint

$$\overset{(n)}{p}(.,v) = p\left(.,\left((v_1, \overset{(n-1)}{p}(.,(v_2,\ldots,v_n))\right)\right).$$

Világos, hogy a $\overset{(n)}{p}$ véletlen norma $\mathbb{C}^n$-en csak a vektor elemek abszolút értékeitől függ, de nemszükségképpen szimmetrikus. Szimmetrikus véletlen normát kapunk, ha $\overset{(n)}{p}$ $\mathbb{R}^n_{+,\geq}$-re vett leszűkítését szokásos módon $\mathbb{C}^n$-re kiterjesztjük. Ha $\overset{(n)}{p}$ egy



2. ábra. A várható érték norma egységkörei. Folytonos – ($n = 1$, $\lambda_n = 0$, $N = 4000$), szaggatott – ($n = 1$, $\lambda_n = 100$, $N = 500$), pont-vonal – ($n = 100$, $\lambda_n = 100$, $N = 1000$).

olyan abszolút és szimmetrikus véletlen norma a $\mathbb{C}^n$ vektortéren, melyet egy p, $\mathbb{C}^2$-n adott, abszolút és szimmetrikus véletlen norma független példányaiból a fenti eljárással nyertünk, akkor azt p *erős kiterjesztésének* hívjuk.

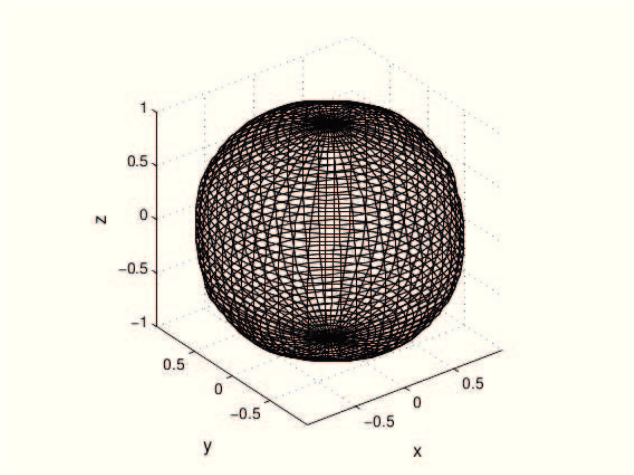
A fenti eljárás fő hátulütője, hogy rögzített $v \in \mathbb{C}^n$-re $\overset{(n)}{p}$ egy olyan valószínűségi változó, ami az eredeti valószínűségi mező n-szeres hatványán van értelmezve. Ez a szimulációk elvégzését nagyban megnehezíti. Ennek okán vezetjük be a *gyenge kiterjesztett* fogalmát, ami az erőstől annyiban különbözik, hogy a konstrukcióban felhasznált indukciós lépést a következővel helyettesítjük:

$$\overset{(n)}{p_w}(.,v) = p\left(.,\left((v_1, \mathbb{E}\left(\overset{(n-1)}{p_w}(.,(v_2,\ldots,v_n))\right)\right)\right).$$

A 3. fejezetben bemutatott véletlen norma háromdimenziós gyenge kiterjesztéséből származtatott várható érték norma egységgömbje a . ábrán látható.

4.2. Egy nyitott kérdés

Az abszolút és szimmetrikus véletlen normák kiterjesztése végtelen dimenzióra egyszerű határátmenettel történhet. Legyen $v = (v_1, v_2, \ldots)$ komplex számok



3. ábra. A 3. fejezetben bemutatott véletlen norma háromdimenziós gyenge kiterjesztéséből származtatott várható érték norma egységgömbje ($n = 100$, $\lambda_n = 100$, $N = 500$) paraméter beállítások mellett.

egy tetszőleges sorozata, és jelölje $\overset{(n)}{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ az eredeti sorozat n-edik csonkítottját. Legyen

$$\overset{(\infty)}{p}(v) := \lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{p}(\overset{(n)}{v})$$

megengedve azt az esetet is, hogy a fenti határérték végtelen. Ha $v \in l^1$, akkor a fordított háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$|\overset{(n)}{p}(\overset{(n)}{v}) - \overset{(m)}{p}(\overset{(m)}{v})| \leq \overset{(n+m)}{p}(\overset{(n)}{v} - \overset{(m)}{v}) \leq ||\overset{(n)}{v} - \overset{(m)}{v}||_1,$$

vagyis $\overset{(n)}{p}(\overset{(n)}{v})$ Cauchy-sorozat $\mathbb{P}$-m.b..

Nyilvánvaló, hogy az (1) tulajdonság végtelen dimenzióra is öröklődik, azaz komplex számok tetszőleges $v = (v_1, v_2, \ldots)$ sorozatára $||v||_\infty \leq \overset{(\infty)}{p}(v) \leq ||v||_1$ és $||v||_\infty \leq \overset{(\infty)}{p_w}(v) \leq ||v||_1$ teljesül $\mathbb{P}$-m.b., ami azt jelenti, hogy a várható értékben véges normájú sorozatok tere az l^1 és l^∞ terek között helyezkedik el tartalmazás tekintetében. A különböző normafolyamatokhoz asszociált várható érték normák végtelen dimenzióban nem szükségképpen ekvivalensek, az esetleges ekvivalencia fennállása ekvivalenciát indukál a normafolyamatokon is. A kérdés az, hogy hogyan jellemezhetők az egy ekvivalencia osztályba kerülő normafolyamatok?

Hivatkozások

[1] Lovas, A. and Andai, A.: *Measure on gauge invariant symmetric norms*, arXiv:1504.04149 (2015).

[2] Bhatia, R.: *Matrix Analysis*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (1997), 84–109.

[3] George, Y. G. and Qing, Z.: *Continuous-Time Markov Chains and Applications*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (2013)

[4] Halmos, P. R.: *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (1978)

[5] Hirsch, C.: *Numerical Computation of Internal and External Flows*, John Wiley & Sons, New York (1990)

[6] Øksendal, B.: *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (2003), 137–140.

[7] Pollett, P. K. and Stefanov, V. T.: Path Integrals for Continuous-Time Markov Chains, *J. Appl. Prob.* **39**, (2002) 901–904.

(Beérkezett: 2015. november 17.)

LOVAS ATTILA
BME, TTK, Analízis Tanszék
Budapest, Egry J. u. 1.
lovas@math.bme.hu

ANDAI ATTILA
BME, TTK, Analízis Tanszék
Budapest, Egry J. u. 1.
andaia@math.bme.hu

MEASURES ON GAUGE INVARIANT SYMMETRIC NORMS

Attila Lovas, Attila Andai

The concept of a gauge invariant symmetric random norm is elaborated in this paper. We introduce norm processes and show that this kind of stochastic processes are closely related to gauge invariant symmetric random norms. We construct a gauge invariant symmetric random norm on the plane. We define two different extensions of these random norms to higher (even infinite) dimensions. We calculate numerically unit spheres of expected norms in two and three dimensions for the constructed random norm. The English version of this paper can be found in [1].

Keywords: continuous-time Markov chain; path integral; permutation invariant norm; unitary invariant norm

Mathematics Subject Classification (2000): 60J28; 60D05; 60J27; 46B20;

Alkalmazott Matematikai Lapok **32** (2015), 79-94.

KALMÁR LÁSZLÓ, A SZÁMÍTÁSTUDOMÁNY HAZAI ÚTTÖRŐJE

SZABÓ PÉTER GÁBOR

Csendes Tibor 60. születésnapjára tisztelettel és szeretettel ajánlom

Az IEEE Computer Society a világ egyik legrangosabb informatikai egyesülete. A társaság 1996-ban elhatározta, hogy az általuk 1981-ben alapított, de az addig szinte kivétel nélkül csak nyugati országokban dolgozó szakembereknek odaítélt Computer Pioneer Award díjat ezúttal Közép- és Kelet-Európai országok számítástechnikai úttörői is megkaphatják. A kitüntetés feltétele az volt, hogy a díjazott olyan maradandó számítástechnikai alkotást kellett, hogy létrehozzon, amely legalább másfél évtized távlatából is kiállta az idő próbáját.

1997-ben a Neumann János Számítógép-tudományi Társaság javaslatára két magyar tudósnak ítélték oda posztumusz a Computer Pioneer Award díjat. Az egyik Kozma László (1902–1983) műegyetemi professzor volt, aki 1955 és '57 között konstruálta meg az ország első programvezérelt jelfogós számítógépét, a MESz-1-et, amit 1958-ban üzembe is állítottak. A másik díjat a szegedi egyetem egykori matematika professzora, Kalmár László

(1905–1976) kapta, a matematikai logika műszaki alkalmazásainak terén elért eredményeiért, elsősorban a szegedi logikai gép megalkotásáért és a formulavezérlésű számítógép tervéért.

Kalmár professzor nagyon sokat tett itthon nemcsak az informatikai kutatásokért, de annak oktatásáért is. Közel félévszázadon keresztül tanított a szegedi egyetemen matematikát és majdnem két évtizedig számítástudományt. 1956 tavaszán munkatársaival kibernetikai szemináriumot szervezett, majd a következő évben – az országban elsőként – beindította a hazai felsőfokú informatikai szakemberképzést.

Több mint ötven éve tanítanak számítógép-programozást a szegedi egyetemen. Mivel az első elektronikus számítógép, az M-3 csak 1965-ben érkezett meg Szegedre, ezért kezdetben a számítógép-programozás még ún. „krétafizikai" módszerrel történt: táblánál, krétával, fiktív gépeken futtatta tanár és diák az algoritmusokat. Kalmár László, az egyetem kiváló matematika professzora azonban már az 1950-es évek második felében látta, hogy rohamosan közeleg az a korszak, amikor Magyarországon is szükség lesz majd az olyan szakemberekre, akiknek érteniük kell az „elektronikus számológépek" programozásához. Kalmár professzor kiharcolta a minisztérium beleegyezését, hogy a szegedi egyetemen az egyszakos tanárképzés megszüntetésekor, a harmadéves tanárjelöltek 5 százaléka az egyik szakjuk elhagyásával a megmaradt szak egy speciális területén elmélyültebb tanulmányokat folytathassanak. 1957 őszén – az országban elsőként – így vette kezdetét három egyszakos (vagy ahogyan hallgatótársaik viccesen hívták őket: EDSAC-os) hallgatóval a (számítógépes) alkalmazott matematikusképzés a szegedi egyetemen. Kalmár tudta, hogy ezzel egy születő tudományágat képvisel, és ahogyan az legtöbbször történni szokott, a születő újnak mindig meg kell harcolnia a maga harcát a konzervativizmussal szemben. Az ő esetében is így volt ez, bár valójában ez a küzdelme nem a kibernetika itthoni elismertetéséért folytatott erőfeszítéseivel kezdődött, hanem már jóval korábban, tulajdonképpen akkor, amikor matematikai logikával kezdett el foglalkozni.[1]

Abszolút igaz tudomány-e a matematika?

Kalmár érdeklődése a matematikai logika iránt az 1920-as évek vége felé kezdődött. Matematikus kollégái közül voltak, akik nem igazán örültek annak, hogy az olyan szép klasszikus matematikai diszciplínák kutatását, mint amilyen például a függvénytan, az analitikus számelmélet, vagy az interpoláció elmélete, olyan egzotikus tárgykörrel akar felcserélni, mint a matematikai logika. Még a matematikusok közül is többen túlságosan elméleti tudománynak tartották ezt, amelyről

[1] Az EDSAC (Electronic Delay Storage Automatic Calculator) az első gyakorlati feladatok megoldására is használható tárolt programú számítógép volt. 1949-ben angol fejlesztés eredményeként készült el a Neumann-elvek alapján.

úgy gondolták, hogy talán inkább a filozófiával van szorosabb kapcsolatban, mint a matematikával, és különben is nem valószínű, hogy valamikor lesz majd ennek bármilyen komolyabb alkalmazása. Riesz Frigyes mélyen lenézte a matematikai logikát, Haar Alfréd valamivel jobban értékelte, de azért ő is megkérdezte Kalmártól, hogy itt is vannak-e tételek és azokat be is bizonyítják-e, vagy csak véleményekről vitatkoznak, mint a filozófusok. A pályáját akkor kezdő fiatal matematikust azonban több olyan hatás érte, amely arra indította őt, hogy a továbbiakban mégis ez legyen a fő kutatási területe.

Kalmár a matematikai logikáról Neumann Jánostól hallott először Budapesten, ahol egyetemi tanulmányait folytatta. A tudományegyetemen akkoriban matematikai logikát még nem lehetett tanulni. Voltak ugyan „Logika" címmel előadások, de Kalmár ezekből hamar kiábrándult, mikor azt tapasztalta, hogy – ahogyan ő fogalmazott – egy logikával foglalkozó „filozófus" büntetlenül elkövethet olyan primitív logikai hibákat, amiket ha egy gimnazista tenne meg matematikából, akkor megbuktatnák ezért. Kalmár a matematikai logika alapgondolatait és a bizonyításelmélet programját szegedi éveinek kezdetén Neumann János egy akkor frissen megjelent dolgozatából értette meg. Módja volt megismerkednie néhány olyan kiváló külföldi matematikussal is, akiknek hatására tovább mélyült a kapcsolata ezzel az itthon még akkor újnak számító tudománnyal.

1928-ban nagy hatással volt rá a korszak egyik legnagyobb matematikusának, Hilbertnek a bolognai nemzetközi matematikai kongresszuson a logika megoldatlan problémáiról tartott előadása. A következő év nyarán el is utazott Göttingenbe, ahol személyesen is találkoztak. Kalmár így emlékezett rá: „Öreg volt már, bizony megesett, hogy halmazelméleti előadásán kiesett a kréta a kezéből. Volt egy nagyon jó magántanára, Bernays, leültette Hilbertet, fölvette a krétát és folytatta az előadást. Közben Hilbert 2–3 percet bóbiskolt, aztán fölnézett, figyelt egy percig, mit mond Bernays, majd visszavette a krétát és folytatta az előadást." Egy ízben Bernays jóvoltából sikerült beszélgetnie is Hilberttel.

Edmund Landau, a kiváló német matematikus is Göttingenben tanított. Kalmár el is járt egyik függvénytani szemináriumára. Közelebbi kapcsolatba azonban nem kerülhettek, mivel akkoriban Landau az új könyvén dolgozott, és minden idejét szigorúan beosztotta, külön nem fogadott senkit. A fiatal szegedi tanársegéd sajnálhatta ezt, hiszen már gimnazista korától ismerte Landau nevét, és annak prímszámokról szóló kétkötetes számelméleti munkáját is. Nem kis meglepetést okozott így a számára, amikor Szegedre való visszatértekor, Landau egyik munkatársától, Fencheltől kapott egy levelezőlapot, amelyen azt kérdezték tőle, hogy megengedné-e Kalmár, hogy Landau a készülő Grundlagen der Analysis c. könyvében publikálja Kalmárnak az aritmetika alapjaival kapcsolatos egyik Bernaysnak tett megjegyzését, ill. ha ezt esetleg korábban már megtette, akkor kérték, adja meg annak irodalmi forrását, hogy Landau hivatkozhasson rá a könyvben.

Hosszasan kellett Kalmárnak gondolkodnia, mire rádöbbent, hogy milyen megjegyzésére vonatkozhatott Landau kérése. Aztán eszébe jutott, hogy tényleg emlí-

tette Bernaysnak, hogy Hilbert az előadásán az egyik állítást szerinte a kelleténél komplikáltabban bizonyította be, és úgy gondolta, hogy ezt egyszerűbben is meg lehetett volna csinálni. Aztán vacsora közben el is mondta ennek részleteit Bernaysnak, hogy Neumann cikkéből kiindulva, ő azt hogyan bizonyítaná. Ezt aztán Bernays elmesélte Landaunak, aminek végül az lett az eredménye, hogy az említett könyv előszavába Landau ezt írta: „habozással állok a nyilvánosság elé ezzel az írással, mert egy olyan területről publikálok ezzel, amelyről semmi új mondanivalóm nincs, leszámítva Kalmárnak egy szóbeli közlését." Ennek a meglepő vallomásnak az volt az előzménye, hogy Landau, aki magát a precízség mintaképének tartotta, az egyik előadásán, amit az aritmetika axiomatikus felépítéséről tartott, hibásan bizonyított be egy hasonló tételt, melyre Kalmár megjegyzése is vonatkozott. Erre egyik tanársegédje hívta fel a figyelmét, ami számára aztán olyan sokkot jelentett, hogy ezért egy könyvet kellett írnia.

Kalmár ekkor még tanársegéd volt a szegedi egyetemen, és Landaunak ez az elismerése nagyon nagy hatással volt rá. Saját bevallása szerint a matematikai logikával való igazi kapcsolata ekkor kezdődött, látta, hogy érdemes ezzel foglalkoznia. Az 1932-es zürichi nemzetközi matematikai kongresszuson már ő maga is tartott egy előadást az ún. eldöntésprobléma kapcsán, amely aztán kutatási tevékenységének egyik fő irányvonalát jelentette.

Az eldöntésprobléma a következő feladatot jelenti: adjunk meg olyan algoritmust, amellyel tetszőleges logikai formulák azonosan igaz volta eldönthető. Kalmár számos tudományos dolgozatot publikált ezen a területen, bár bizonyos értelemben boldogtalan kincskeresés volt ez, hiszen később kiderült, hogy ilyen algoritmus bizonyíthatóan nem létezik (feltéve persze, hogy az algoritmus intuitív fogalma alatt azt értjük, ahogyan azt ma egzakt módon tárgyalni szokás). Mindenesetre bizonyos speciális formulaosztályokra megoldható az eldöntésprobléma és bizonyos típusú formulákra Kalmárnak sikerült is azt megoldania. Egy ilyen feladat kapcsán történt az, hogy Kalmár Gödellel és Schüttével egy időben, de tőlük függetlenül oldott meg egy problémát, amit azonban Gödel hamarabb tudott publikálni. Hilbert viszont mégsem engedte visszavonni Kalmár dolgozatát a Math. Annalen folyóirattól, mert abból jobban meg lehetett érteni az alkalmazott módszert. Kalmár legtöbb cikkét az eldöntésprobléma ún. redukció-elméletének szentelte, amikor is az általános problémát visszavezette bizonyos speciális eseteire.

Kalmár sokat foglalkozott Gödel és Church nevezetes tételeinek egyszerűsítésével, általánosításával és helyes interpretáción alapuló népszerűsítésével is. Gödel 1931-ben közölte nagy horderejű eredményét, miszerint minden „valamirevaló" axiómarendszerben (azt, hogy ez mit jelent, persze pontosan meg lehet határozni) megfogalmazható olyan probléma, ami a rendszer keretein belül nem oldható meg, vagyis azt az adott axiómarendszer eszközeivel sem igazolni, sem cáfolni nem lehet. Ez egyben azt is jelenti, hogy nincs olyan abszolút axiómarendszer, amire az egész matematikát fel lehetne építeni, mert akármilyen értelmes axiómarendszert is rögzítenénk, mindig találhatnánk olyan feladatot, amit a rendszer fogalmaival

ugyan le tudnánk írni, de semmilyen módon nem tudnánk azt sem bizonyítani, sem cáfolni kizárólag csak a rendszer axiómáinak felhasználásával.

Church példát adott algoritmussal egyáltalán meg nem oldható problémaseregekre is, és igazolta, hogy nincs olyan algoritmus, amellyel bármely adott logikai formuláról el lehetne azt dönteni véges számú lépésben, hogy az azonosan igaz-e. Church eredményét népszerűen úgy szokták mondani, hogy vannak abszolúte megoldhatatlan problémaseregek, míg Gödel tétele axiómarendszertől függő, relatíve eldönthetetlen problémák létezésére mutat rá. Church tételét mélyebbnek gondolták Gödelénél, így meglepő volt, amikor Péter Rózsa észrevette, hogy ez nem így van. Church tétele levezethető a Gödel-tételből, sőt Kalmár azt is igazolta, hogy a Church-tétel egyenesen speciális esete a kellő általánosságban megfogalmazott Gödel-tételnek.

Izgalmas területre jutunk akkor, amikor az ún. Church-tézisről gondolkodunk, amelyen Church tétele is alapult. A kérdés tulajdonképpen az, hogy mi is az „algoritmus". Erről mindenkinek lehet valamiféle intuitív fogalma: egy véges eljárás, amely minden lépésben pontosan előírja, hogy mit kell csinálni. Ha azonban, azt akarjuk megmutatni, hogy valamely probléma megoldására egy adott eszközkészlet mellett nincs algoritmus, akkor azt kell bebizonyítani, hogy soha senki nem tud olyan véges eljárást/bizonyítást kreálni, amely megoldaná a feladatot. Az ilyen matematikai bizonyításhoz viszont szükségünk van az algoritmus egzakt definíciójára. Több ügyes kísérlet történt az egzakt definíció megadására, amelyekről végül kiderült, hogy egymással egyenértékű fogalmat eredményeznek, így nagyon is ésszerűnek tűnik, ha az algoritmus intuitív fogalmát a javasolt egzakt fogalmakkal (pl. általános rekurzív függvény, Turing-géppel kiszámítható függvény) helyettesítjük. A Church-tézis azt jelenti, hogy tegyük ezt meg. Persze azt, hogy ezt tényleg jogos megtenni, matematikai szigorúsággal bizonyítani nem lehet, csak ún. plauzibilitási érvekkel lehet alátámasztani. Mindenesetre, ha elfogadjuk a Church-tézist, akkor a továbbiakban nyugodtan alhatunk, mert meg tudjuk mindenki számára mondani, hogy mi az az algoritmus.

Kalmár azonban nem igazán hitt abban, hogy a matematika eljárásait valaha is az előbbieknek megfelelő zárt keretek közé lehet kényszeríteni. Nagyon érdekes az, ahogyan rámutatott arra, hogy a Church-tézis ellen éppúgy lehet plauzibilitási érveket felhozni, mint ahogyan Church mellette hozott fel hasonló érveket. Kalmár egészen meglepő következtetésre jutott: ha valaki elfogadja a Church-tézist, akkor azt is el kell, hogy fogadja, hogy vannak olyan tételek, amelyek ugyan igazak, de azt, hogy igazak, azt semmilyen helyes okfejtéssel soha nem lehet bebizonyítani. Nem csak most nem tudjuk bebizonyítani őket! Soha nem fogjuk! Kalmár szerint, ha valaki hisz abban, hogy a világ törvényei megismerhetők, akkor nem fogadhatja el a Church-tézist, mert abból azt lehet levezetni, hogy vannak olyan törvényszerűségek, amelyek teljesülnek, de hogy ez tényleg így van, ezt soha senki nem fogja tudni bebizonyítani. Mondhatni egyrészt azért, mert magunk zártuk magunkat zárt keretekbe azáltal, hogy rögzítettük az algoritmus fogalmát. Ez esetleg kelle-

mes lehet, biztonságérzetet adhat, de a megismerésünk korlátoltságával fizetünk érte.

Matematikai ars poeticájának is felfoghatók az alábbi sorai: „...megjártam a matematikai egzaktság magasiskoláját, s látom, hogy az egzaktságnak nincs határa, nincs olyan precíz módon megfogalmazott definíció, vagy tétel, amibe még precízebb álláspontról bele ne lehetne kötni, mégpedig nemcsak szőrszálhasogatásból és kákáncsomókeresésből, hanem alapos okkal (mert a precízebb álláspont el nem fogadása effektív hibákhoz, hamis eredményekhez vezethet); éppen ezért nem tudom többé statikus-dogmatikusan felfogni a matematikai precízséget: aki ezen innen van, nem precíz, aki túl, az precíz. Ezzel együtt elejtettem persze a matematikának, mint *abszolút igaz tudománynak* a képzetét. Nem írom, hogy kénytelen voltam elejteni, mert az a meggyőződésem, hogy épp az a szép a matematikában, hogy magán viseli az emberi alkotás minden bizonytalanságát. Félre ne érts: létezik számomra is precízség, de nem statikus, hanem dinamikus értelemben: mint precízségre törekvés. Amikor valakit matematikára tanítok, már áll a precízség valamilyen, esetleg nagyon alacsony fokán; magasabbra nem úgy jut, hogy én dogmatikusan magasabb fokra állok és lemarházom, ha ő kevésbé precíz, hanem úgy, ha meggyőzőm arról, hogy érdemes feljebb jönnie. Persze mindezt csak akkor érdemes, ha van benne igény rá; egy cseppet sem baj, ha nincs, akkor maradunk ott, ahol voltunk." Persze kérdés, hogy a fenti sorokban igaza van-e Kalmárnak. A matematikatörténet példái azt mutatják, hogy igen. Néhány mai logikus esetleg, úgy gondolhatja, hogy nem. Száz év múlva érdemes lenne esetleg visszatérni erre a kérdésre.

„Mitől mozog?"

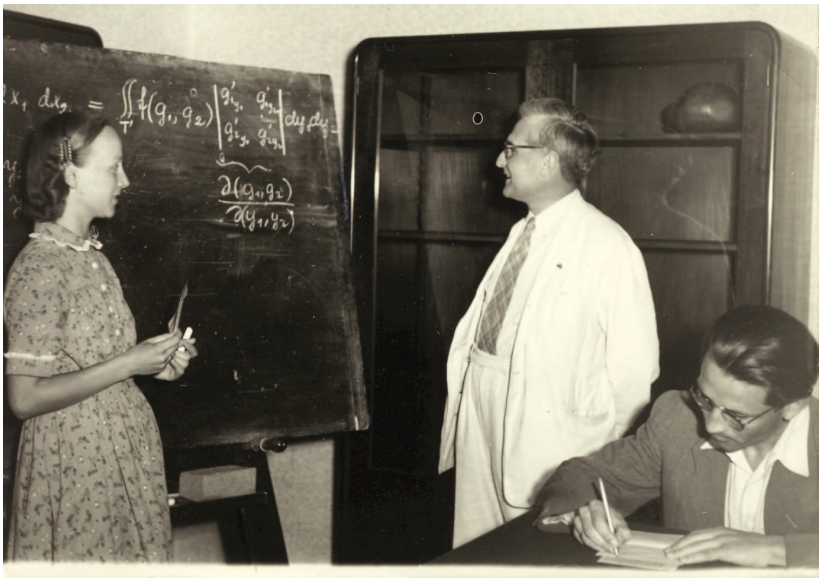
Kalmár László sajátságos szellemben tanította a matematikát. A tanításban elsősorban az motiválta, hogy mindig szerette volna a nehéz kérdéseket könnyűvé tenni. Úgy megtartani egy előadást, hogy azt ne csak a tehetséges diákok, hanem bárki megérthesse, ha annak kellőképpen nyitott az elméje, és érdeklődik a téma iránt. Szerette felfedeztetni a matematikát. Ne kényszer legyen, hanem szükségét érezze a diák, amikor egy új fogalmat kell bevezetnie. A definíció nála sokszor nem a kiindulópont volt, hanem a végállomás, ahogyan a szemléletestől eljutott az absztrakt fogalomig. Ugyanez vonatkozott a tételekre is. Ma az egyetemen legtöbbször kimondunk egy tételt, majd azt követi a bizonyítás. Nála gyakran egy gondolatsor zárásaként, mint végkifejlet jelent meg a tétel megfogalmazása.

Kalmár szerint egy tétel kimondása és annak helyes bebizonyítása még nem feltétlenül elégséges a valódi tudáshoz. Úgy vélte, hogy az érti a tételt igazán, aki tudja azt is, hogy mi a lényeges pont annak a bizonyításában. Mi ad motivációt egy tétel megfogalmazásához, és hogyan lehet rájönni annak egy bizonyítására. Hogyan lehetne másképpen bebizonyítani ugyanazt. Magyarázzuk meg, hogy milyen eszközt és miért használunk. Ne csak azt lássuk, hogy logikailag helyes valami, hanem azt is, hogy miért van szükség az adott lépésekre. Elég csak

elővenni például a matematikai analízisről kiadott jegyzeteit, hogy összehasonlítva azt más hagyományos tárgyalásokkal, lássuk annak sajátos voltát.

Kalmárra nagy hatással voltak egykori pesti tanárai, Kürschák József és Fejér Lipót. Fejér is művésze volt a matematikának. Előadásait még olyanok is hallgatták, akiknek egyébként kevés közük volt a matematikához, ugyanis nemcsak az volt nála az érdekes, hogy mit mond, hanem az is, ahogyan azt mondta. Kalmár így emlékezett rá: „Fejér Lipótnak hihetetlenül szuggesztív volt az előadásmódja. Nem sokat törődött azzal, hogy mennyi anyagot végeztünk, de rengeteget lehetett tőle tanulni, persze csak annak, aki rezonált rá. A gyenge hallgatók nevettek rajta, hogy előadás közben grimaszokat vág, hogy hol a hátsó padból magyaráz, hol pedig előre fut a táblához, ír valamit, aztán megint hátramegy. Azok voltak a legérdekesebb előadásai, amikor valamit már befejezett, és nem akart újba kezdeni, és mesélt a legutóbbi olvasmányairól, ami hatással volt rá. Ezzel olyan távlatokat nyitogatott az ember előtt, amit akárhány előre jól átgondolt, szabványos előadás sem tudott nyújtani.” Ottlik Géza, aki szintén Fejérnél tanult, ezt írta róla: „Kívülállónak nem lehet elmondani, hogy milyen volt Fejér Lipót. Óriás volt. Földöntúli vigasztalás a puszta lénye. Aki nem ismerte, az valamit nem tud a világról, és sohasem fogja megtudni.” Kalmár a Fejér-előadásokról évfolyamtársával, Péter Rózsával gyönyörű jegyzeteket készített, volt, hogy ezek egyikére Fejér egyik tudományos dolgozatában hivatkozott is.

Kalmárnak a tanításról vallott nézetei szorosan kapcsolódtak matematikai munkásságához is. Saját bevallása szerint, neki sosem volt az a fő ambíciója, hogy minél



több cikket írjon, így nem véletlen az sem, hogy vannak olyan eredményei, amelyeket ma az ő nevével is emlegethetnénk, ha publikálta volna azokat. „Cikkeim egy részében nem annyira az új eredmények közlésére, hanem valaminek a megmagyarázására, népszerűsítésére törekszem" – nyilatkozta egyszer. Látta, hogy szervesíteni, igazán megérteni valamit nagyobb örömöt jelenthet még az új tudományos információ közlésénél is.

Egy új matematikai eredmény, amikor megszületik, akkor mindenekelőtt az a fontos, hogy az helyes legyen. Az új eredményeket közlő matematikai cikkek azonban legtöbbször közel sem nyilvánvaló gondolatokból, hanem ügyes, trükkös és gyakran hosszú, sokoldalas matematikai meggondolásokból állnak. Kalmár matematikai munkásságának egyik fontos aspektusa, hogy gyakran meg tudta ragadni a matematikai gondolatok lényegét, így egy-egy bizonyítást lényegesen egyszerűbben tudott „tálalni", mint ahogyan annak szerzője azt eredetileg kitalálta. Így született meg például Erdős Pál első tudományos cikke is, annak elemi bizonyítására, hogy bármely 1-nél nagyobb egész szám és annak kétszerese közé mindig esik prímszám. Ez az ún. Csebisev-tétel, amire Csebisev korábban már adott egy komplex bizonyítást. Erdős Pál elemi matematikai eszközökkel egy új bizonyítást gondolt ki (ráadásul többet is bizonyított Csebisevnél), de bár az eszközök elemiek voltak, „homályos és hézagos írásmodora miatt" elsőre Erdős bizonyítását sem igen értették meg, még maga Kürschák József sem. Kalmár László segítette neki azt cikké formálni. Nem hiába emlékezett erre később Erdős úgy, hogy „nagyon sokat tanultam Fejér Lipóttól, de a legtöbbet valószínűleg Kalmár Lászlótól." (Erdős doktori disszertációját szintén Kalmár fogalmazta meg és írta le jól érthető formában.)

Persze mai szemmel nézve a dolgokhoz való ilyesfajta hozzáállás kicsit furcsának tűnhet. Ma talán a „publish or perish" jegyében sok kutatónak más lehet az ambíciója. Minél több cikket írni, minél több új eredményt publikálni, ami persze érthető is. Érdemes azonban elgondolkodni a mesterséges intelligencia úttörőjének Minskynek egy gondolatán, amely Kalmárnak is nagyon megtetszett, amikor Kanadában jártakor annak egyik írásában találkozott vele. Minsky azt mondta, hogy talán érdemesebb arról írni, hogy hogyan jött rá az ember nehéz problémák megoldására, mert az tanulságos lesz az utókor számára, mint arról, amit az ember legutoljára bebizonyított, mert az a jövő században úgyis valamilyen nagyon általános fogalomra vonatkozó nagyon általános tétel érdektelen speciális esete lesz majd.

A szóbeli Kalmár-vizsgák sajátos rituálé szerint lezajló nyilvános számonkérések voltak. A vizsgázókon kívül gyakran más hallgatók is jelen voltak, hogy meghallgassák a feleleteket. Tea és sütemény is volt a teremben, a gyakorlatvezetők segítettek a szervírozásban. A vizsgázónak mindig résen kellett lennie, hogy elmondhassa a feleletét, mert Kalmár rendkívül gyors gondolkodású matematikus volt, pillanatok alatt átlátta, ha valaki rossz irányba indult el, nem lehetett nála mellébeszélni. Ha kiderült, hogy még a hallgató maga sem érti azt, amiről beszél, volt, hogy annyira elragadtatta magát, hogy kiabálva verte a táblát, rámutatva,

hogy hol a hiba a bizonyításban, ami után aztán a hallgatóság egy színvonalas kiselőadás részesévé is vált a professzor úrtól.

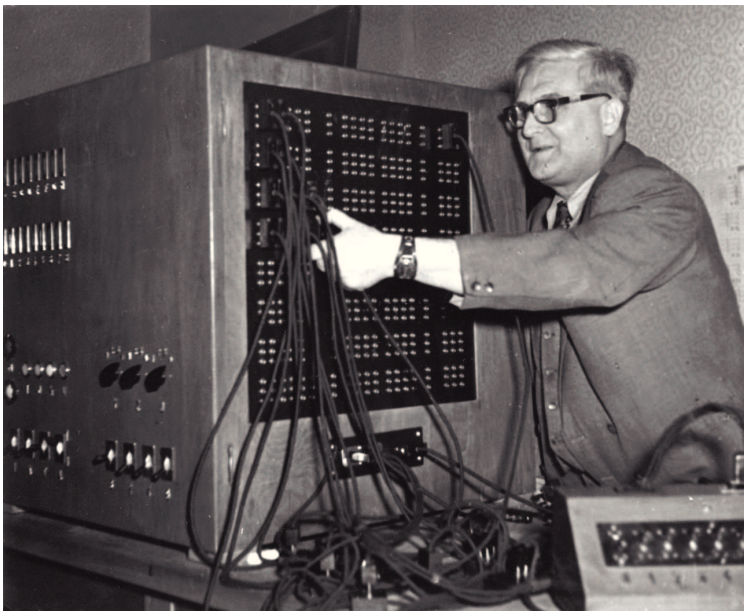
Kalmár László azonban nemcsak a katedrán végzett pedagógiai munkát, hanem levelezés útján is. Az 1986-ban kiadott Integrállevél c. könyvecskében Szabó Miklós makói gyermekorvosnak írt 40 oldalas levelét adták közre (más érdekes tanulmányokkal együtt), amelyben Kalmár annak egy kérdésére reflektálva – nevezetesen, hogy mit is jelentenek a kémia könyvekben azok az elnyújtott S betűk (integráljelek) – elmagyarázta neki az integrálszámítás lényegét. Kalmár készséggel segített mindenkinek, aki valamilyen kéréssel, kérdéssel fordult hozzá akár személyesen, akár levél útján. Péter Rózsa írta: „Ha valaki az utolsó évtizedek magyar matematikájáról akarna tanulmányt írni, egyik fő forrása Kalmár levelezése lehetne: a legkülönbözőbb területeken dolgozó matematikusok fordultak hozzá kérdéseikkel, és kaptak tőle munkájukat előbbre segítő feleletet. Hozzá fordultak, mert tudták, hogy matematikus egyéniségének legfőbb vonásai: a matematika egész területének világos áttekintése, nemcsak terjedelmében, hanem mélységében is, és szinte egyedülálló pedagógiai érzék." Péter Rózsa tapasztalatból tudta ezt: Kalmár neki egy 64 oldalas levélben írta meg az aritmetika ellentmondás-mentességére adott Gentzen-féle bizonyítás alapgondolatát.

A Szegedi Tudományegyetem Egyetemi Könyvtárában őrzött Kalmár-hagyatékban Kalmár Lászlónak közel 700 levelezőpartnerrel folytatott levelezése maradt meg, több ezer levél. A közelmúltban ebből a gazdag, tudománytörténeti szempontból is érdekes anyagból 24 magyar matematikussal folytatott levelezését adta ki a Polygon Kiadó (Kalmárium I-II, 2005, 2008), több mint félezer levelet sok más egyéb dokumentummal, tanulmánnyal, életrajzzal, beszélgetéssel, jegyzetekkel és fényképekkel egyetemben.

Két történetet emelnénk most csak ki a Kalmár-legendáriumból. Az egyiket Székely Sándor mesélte: „Feltűnt, hogy amikor kísértem az előadásra, nemigen volt szabad szólni semmit. Sőt, hogy ha Ő kérdezett valamit, arra is csak igennel meg nemmel volt szabad válaszolni. Egyszer egy hallgató jött vele szembe, és kérdezni akart valamit. Rettentően dühbe gurult, úgy, hogy az előadása előtt egy percet várnia kellett, amikorra annyira lehiggadt, hogy megkezdhette az előadást. Aztán megkérdeztem Tőle, hogy mi ennek az oka? Izgul? Azt mondta: igen. És ez rendkívül érdekes volt, hogy Ő, aki egész életében hihetetlenül sok előadást tartott, aki egész életében pedagógiai munkát végzett: izgult. És akkor kijelentette, hogy tudod, úgy van ezzel az ember, hogy ha már nem izgul, akkor ne tartson előadást. Addig szabad előadást tartani, amíg izgul."

Tanítványa, Surányi János így emlékezett rá: „Amikor valamit közösen elolvastunk, engem eleinte kifejezetten bosszantott az, hogy amikor végigmentünk a bizonyításon, és minden pont világos volt, hogy miből és hogyan következik, ő akkor kezdett el tulajdonképpen gondolkozni arról, és ez volt talán a legfontosabb, amit tőle tanultam (ha nehezen is tanultam meg). Ő úgy fogalmazta meg a kérdést, hogy: Mitől mozog?... Mi az, amitől mozog a bizonyítás?"

„Most gépeink teszik mindezt helyettünk”



Kalmár László a számítógépekkel, vagy ahogyan akkor hívták őket „elektronikus számológépekkel” az 1950-es évek közepétől kezdett el behatóbban foglalkozni. Szinte azonnal felismerte a bennük rejlő forradalmi lehetőségeket. 1956. április 10-én szemináriumot szervezett a szegedi egyetemen a matematikai logika műszaki alkalmazásainak a szakirodalom alapján való megismerésére. Hamar kiderült azonban, hogy a témával úgy kerülhetnek még szorosabb kapcsolatba, ha nemcsak könyveket, cikkeket tanulmányoznak, hanem maguk is megpróbálkoznak valamilyen konkrét számítástechnikai berendezés építésével. Kalmár egyik adjunktusa felvetette, hogy építsenek egy kis elektronikus számológépet. Pesti kollégájuk, Tarján Rezső azonban hamar lebeszélte őket arról, hogy számológép építésébe kezdjenek, mivel az túl drága lett volna, inkább azt javasolta, hogy foglalkozzanak logikai gépekkel. Adott hozzá szakirodalmat is. Kalmár egykori tanítványa, majd munkatársa, Muszka Dániel így emlékezett ezekre az időkre: „Első feladatom a szemináriumon az volt, hogy hozzak egy jelfogót, mert ezt meg kell ismerni, ugyanis – mint (akkor már nekem is így volt szólítható) Laci bácsi mondta – ez lesz a leendő gépünk építőköve. Mindenkit nagyon érdekelt a jelfogó: ki lelkesen, ki kissé borzongva vette kezébe ezt a különös izét... (egy közönséges, 48 V-os, két váltóérintkezős postai jelfogó volt, ám akikkel itt kapcsolatba került, azok az elméleti matematika kitűnőségei voltak, így érthető volt borzongásuk és tiszteletreméltó az azt legyőző tudásvágyuk). Néhány hónap elteltével

Laci bácsi, a frissen szerzett jelfogós ismeretei birtokában, kidolgozta egy 8 változós, jelfogós logikai gép áramköri terveit. (Ezeket később megmutattam egy postamérnöknek, aki a relés telefonközpontok specialistája volt: zseniálisnak, lélegzetelállítóan szellemesnek találta, és teljességgel kizártnak tartotta azt, hogy ezt egy olyan ember készítette, aki néhány hónappal ezelőtt látott először jelfogót. Persze ő nem ismerte még Laci bácsit...)"

A Kalmár-féle logikai gépet 1958. május 1-jén mutatták be az egyetemen. A gépet Kalmár tervei alapján Muszka Dániel építette meg. A logikai gép segítségével az ítéletkalkulus logikai formuláiról lehetett eldöntetni, hogy azok mikor kielégíthetők. A konstrukció egyik érdekessége az volt, hogy a logikai változók értékeit nem két érintkezős bemenettel, hanem hárommal valósította meg. Ha a függőlegesen egymás alatt álló három bemenet közül a felső kettőt kötötték össze, az a hamis értéket jelentette, ha az alsó kettőt, az az igazat. Kalmár rendre megtervezte a negáció, a konjunkció, a diszjunkció és más kétváltozós logikai művelet megvalósítását.

Az elektromechanikus vezérlésű logikai gép egy tisztán huzalos megoldású konstrukció volt. Programozása dugaszolás útján történt, amellyel egy legfeljebb nyolc logikai változót tartalmazó tetszőleges bonyolultságú formulát tudtak vizsgálni. A gép állapotát és az eredményt jelzőlámpákról lehetett leolvasni. Alkalmazási lehetőségeit tekintve használhatták például vasútbiztosító mérnökök annak meghatározására, hogy egy pályaudvaron hogyan álljanak a váltók és a szerelvények, hogy egy adott vonat egy adott sínpárra való befutáshoz szabad jelzést kapjon, de alkalmas volt például adott működési feltételeknek megfelelő áramkörök helyességének az ellenőrzésére is. Bár a gép igazi jelentősége talán abban állt, hogy Kalmár és munkatársai a gép tervezése és építése kapcsán mondhatni kicsit jobban „belemelegedtek" a kibernetikába.

A szegedi logikai gép dugaszolással való „programozása" elég nehézkes volt, ezért készítettek hozzá egy olyan billentyűs berendezést, amely az adott logikai formula alapján automatikusan felépítette a megfelelő logikai áramkört. Ekkor felmerült az ötlet, hogy ezen az elven számológépet is lehetne csinálni, ha nem logikai formulát, hanem valamilyen programozási nyelven írt programnak a jeleit vinnék be, és így a gép fordítóprogram nélkül megérthetne egy magasabb szintű programozási nyelvet.

A formulavezérlésű számítógép tervét Kalmár 1959-ben vetette fel egy varsói konferencián. Az ilyen számítógép anyanyelve nem alacsonyszintű gépi nyelv, hanem egy magasabb szintű programozási nyelv. Vagyis ekkor a matematika formulanyelvéhez hasonló módon lehet odaadni a formulavezérlésű gépnek a feladatot, és az anélkül oldja azt meg, hogy közben le kellene fordítania gépi nyelvre. Itt nincs szükség fordítóprogramra, mivel a gép eleve úgy van megszerkesztve, hogy egy formulanyelv az anyanyelve. Kalmár ötlete a formulavezérlésű gépről már régen megszületett, megvalósítására azonban itthon nem kapott sem engedélyt, sem pénzt. Kijevben viszont Gluskov és munkatársai Kalmár munkáiból

kiindulva szerkesztették meg a MIR számítógépet, amelynek a nyelve közel állt az ALGOL-60-hoz.

A szegedi informatikai kutatások eredményeként született meg ekkor az első hazai kibernetikai állatmodell is, a Szegedi Katicabogár. Muszka Dániel tervezte és építette. Az első magyar műállat a feltétlen és a feltételes reflexek modellezésére szolgált, elektroncsövekből, germániumdiódákból, fotocellákból, jelfogókból, elektromotorokból, hangszórókból és mikrofonból állt össze. Ha egy fényforrásból rávilágítottak, magától elindult a fény irányába; ha furulyaszót hallott, akkor villogott a szemével. Néhányszori együttes impulzus után egy beépített tanulóalgoritmus alapján elég volt csak furulyázni neki, követte a hangot. A Szegedi Katicabogár jelenleg is működőképes, a logikai géppel együtt az Informatika Történeti Múzeum Alapítvány szegedi gyűjteményében, a Szent-Györgyi Albert Agorában tekinthető meg.

1957 őszétől kezdve Kalmár professzor lelkesen fogott hozzá a programozás tanításához is a szegedi egyetemen. Ahogyan a matematikai fogalmak esetén, itt is igyekezett szemléletessé tenni a használt módszereket. A ciklusszervező utasítás bevezetésekor kedvenc példája volt a „kis inas", akit a mester elküldött a kútra egy kantával vízért. Feladatul kapta, hogy x kanta vizet hozzon egy dézsába. A dézsa mellett egy kosárban volt x darab kavics. Indulás előtt az inas mindig kivett a kosárból egy kavicsot, s mindaddig kellett járkálnia a kútra, amíg el nem fogyott a kavics a kosárból. Emlékezetesek voltak az előadásainak illusztrálásaként bemutatott népszerű zászlós ábrái is.

Kalmár a hatvanas évek elejétől behatóan foglalkozott a matematikai nyelvészettel is. A Chomsky-féle generatív nyelvészet jelentőségét felismerve rámutatott arra, hogy a matematika és a nyelvészet eredményei és módszerei hogyan alkalmazhatók kölcsönösen a két tudományban. A formális nyelvek elmélete mellett Kalmár professzor környezetében ekkor kezdett kialakulni egy automataelméleti iskola is, amely a mai napig a szegedi informatikai kutatások egyik virágzó területe.

Az első elektronikus számítógép, az M-3 (másik nevén: M-3-M) 1965-ben érkezett meg Szegedre. Nem sokkal előtte kezdte meg 1963-ban a Kibernetikai Laboratórium a működését az egyetemen. Az M-3 elektroncsövekkel működő elsőgenerációs gép volt, és egyben az első magyar építésű elektronikus számítógép. Budapesten az MTA Kibernetikai Kutatócsoportja készítette szovjet dokumentációk alapján. Nagy kaland volt a Szegedre való költöztetése és üzembeállítása is. Ismét Muszka Dánielt idézzük: „Mint minden beállításnál, így az M-3 esetében is elérkezett az ünnepélyes üzembe helyezés napja. Előző este úgy 9 óra tájban bejött Laci bácsi a gépterembe és érdeklődött, hogy minden rendben van-e? Teljesen megnyugtató választ tudtunk adni, hiszen a teszt-programok és a laboratórium matematikusai által már elkészített programok napok óta hibátlanul futottak. Laci bácsi távozása után, mintegy félóra elteltével elementáris erejű zivatar tört ki, óriási villámlások kíséretében. Néhány perc múlva, egy hatalmas villanás után az áramszolgáltatás megszűnt... Aki valaha is dolgozott elsőgenerációs (azaz elekron-

csöves) számítógéppel, annak nem kell különösebben ecsetelni, hogy mit jelentett a gép számára az ilyen körülmények között létrejött áramkimaradás. Azoknak – és ma már ők vannak nagy többségben – akik csak hallottak az ilyen gépekről, csak annyit: az áramszünet 20 percig tartott; ezután visszakapcsoltuk, és reggel 5 óráig több, mint 40 darab meghibásodott elektroncsövet cseréltünk ki a gép különböző egységeiben. Reggel 6 órakor a tesztek ismét hibátlanul futottak, és délelőtt az ünnepélyes üzembe helyezés zavartalanul megtörtént." 1968-ig működött az egyetemen az M-3, ekkor váltotta fel a második generációs (immár tranzisztorokkal működő) számítógép, a Minszk-22.

A Minszk-22 gépet Kalmár László számítástechnikai munkásságának elismeréseként ajándékozta az egyetemnek az Országos Műszaki Fejlesztési Bizottság. Megbízható, jól működő gép volt. Különböző orvostudományi alkalmazásoknál is használták. Az orvosok először azt próbálták megvizsgálni, hogy számítógép segítségével hogyan lehetne azt kideríteni, hogy egy gyógyszer mikor hatásos. Ehhez olyan szignifikancia vizsgálatokat végeztek valószínűség-számítási eszközökkel, amelyekkel igyekeztek elkülöníteni a véletlen gyógyulásokat a törvényszerűtől. De használták a gépet az idegfiziológiai kutatásokban és magatartáselemzésre is. A nukleáris medicina területén folytatott számítógépes kutatások szintén ekkor vették kezdetüket Szegeden.

1975-ben egy újabb generációváltás történt. Ekkor érkezett a harmadik generációs számítógép, az R-40 az egyetemre. Ez már integrált áramkörökkel működött, a maga idejében modern gépnek számított. Szükség is volt a váltásra, mert egyre inkább érezhetővé vált, hogy a felmerülő feladatok megoldására a korábbi gép már nem elegendő. A Minszk-22-t 1976 májusában leállították, majd egy budapesti ipari szövetkezetnek adták, ahol még több évig dolgoztak vele. Ma ez a gép is a szegedi informatikai gyűjteményben tekinthető meg.

Kalmárnak több olyan ötlete is volt a számítástudomány területén, aminek az elméletét csak felvázolni volt lehetősége. Érdekes gondolata a matematikai ötletközlő interaktív programozási nyelv megalkotása is. Úgy gondolta, hogy hasznos lehetne egy olyan alkalmas programozási nyelvet konstruálni, amelyen a matematikus egy adott problémára vonatkozó ötleteit közölni tudná a géppel, amely aztán kipróbálná az ötleteket, visszaadná a részleteredményeket, amik alapján a matematikus, értékelve az eredményeket, újabb ötleteket közölhetne a géppel, és ennek iterációjaként, mint egyfajta interaktív bizonyítás útján juthatna közelebb a feladat megoldásához.

Senki számára nem kell bizonygatni, hogy az informatika micsoda rendkívüli fejlődésen ment keresztül az elmúlt évtizedekben. Érdekes lehet ezért megnézni azt, hogy a számítástudománynak egy olyan úttörője, mint amilyen Kalmár László is volt, a maga korában hogyan vélekedett a számítástechnika fejlődéséről, mit gondolt arról, hogy hova fog ez majd a későbbiekben vezetni. Kalmárt többször megkérdezték erről, élete utolsó évében így nyilatkozott: „A számítógépek további fejlődése oda fog vezetni, hogy egyrészt mindenki olcsón vásárolhat zsebbe férő kis

számítógépet, másrészt a számítás, általánosabban az információfeldolgozás éppoly közszolgáltatás lesz, mint ma a telefon: mindenki „feltárcsázhatja” a központi nagy számítógépet, „betárcsázhatja” neki a feladatot és esetleg emberi hangon megkapja tőle a megoldást, esetleg képernyőn jelenik meg neki. A mai multiprogramozásos rendszerek nem is állnak ettől nagyon messze, a századfordulóra valószínűleg nem lesz már utópia.” Nos, ma már tényleg nem utópia.

Kalmár professzor munkásságával indult meg az informatika oktatása és kutatása a szegedi egyetemen. Sokan kaptak tőle maradandó útravalót matematikából és számítástudományból egyaránt. Saját példájával igazolta azt a tanácsát, amelyet egyszer a fiataloknak adott: „Ha valamiről azt hiszitek, hogy igazatok van, minden gáncsoskodás ellenére csináljátok, a jövő igazolni fog benneteket.”

Életrajzi adatok.

1905. márc. 27.	Kalmár László a Somogy megyei Edde községhez tartozó Alsó-Bogát pusztán született.
1910–1914	Elemi iskolai tanulmányait (II–V. osztályt) Sárszentágotán végzi a községi népiskolában.
1914–1922	A budapesti I. kerületi kir. állami főgimnáziumban tanul. Matematikatanárai között van Dávid Lajos is, a jeles matematikus, matematikatörténész, Bolyai-kutató.
1922–1926	A budapesti tudományegyetem matematika-fizika szakán tanul, de látogatja a matematika előadásokat a Műegyetemen is.
1927. jún.	Diplomát és doktori oklevelet szerez, majd a Vatea elektroncsőgyárban kap állást, mint kutató laboratóriumi fizikus.
1927. szept. 1.	A szegedi egyetemre kerül tanársegédnek Ortvay Rudolf elméleti fizikus matematikai fizikai tanszékére.
1928	Részt vesz a bolognai nemzetközi matematikai kongresszuson, ahol nagy hatással van rá David Hilbertnek a matematikai logika megoldatlan problémáiról tartott előadása.
1929	Göttingenbe utazik, ahol személyesen is találkozik Hilberttel.
1930	Riesz Frigyes és Haar Alfréd közös adjunktusa Szegeden.
1932	Magántanári képesítést szerez a szegedi egyetemen az „Aritmetika és analízis” tárgykörökből.
1936	Megkapja az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat Kőnig Gyula jutalmát.

1947	A Szegedi Tudományegyetem Felsőbb mennyiségtani tanszékére egyetemi tanárrá nevezik ki.
1949	Az újjászervezett MTA levelező taggá választja.
1950	Kossuth-díjjal tüntetik ki.
1950/51	A Szegedi Tudományegyetem rektora.
1956. ápr. 10.	Kibernetikai szemináriumot szervez mérnökök és matematikusok bevonásával a matematikai logika műszaki és egyéb alkalmazásainak megismerése céljából.
1957 őszén	Elsőként az országban, Szegeden elindítja a (számítógépes) alkalmazott matematikus képzést.
1958. máj. 1.	Bemutatják a tisztán huzalos megoldású Kalmár-féle logikai gépet.
1958–59	A magyar-kínai kultúregyezmény keretében, valamint a sanghaji Futan Egyetem meghívására előadásokat tart Pekingben, Vuhanban, Sanghajban és Hangcsouban.
1961	Az MTA rendes tagjává választják.
1967	Kalmár László vezetésével a Bolyai Intézeten belül létrejön. A matematika alapjai és számítástechnikai tanszék, amelyből 1971-ben létrejön a Számítástudományi tanszék.
1975	Az MTA kiküldetésében Kanadában és az Amerikai Egyesült Államokban jár és tart előadásokat. Itthon Állami-díjat kap.
1975. okt.	Nyugállományba kerül.
1976. aug. 2.	Az MTA mátraházi üdülőjében hunyt el.

Köszönetnyilvánítás.

A kutatást támogatta a Telemedicína fókuszú kutatások Orvosi, Matematikai és Informatikai tudományterületeken (TOMI) című pályázat: TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0073.

Irodalomjegyzék

[1] Ádám András – Dömösi Pál: *Kalmár László*. In: Műszaki nagyjaink VI. kötet, Szerk.: Pénzes István, Gépipari Tudományos Egyesület Kiadása, Bp., (1986), 47–89.

[2] Bohus Mihály – Muszka Dániel – Szabó P. G.: *A szegedi informatikai gyűjtemény*, Új Kép 9 (2005) No. **10**., 35–40.

[3] Csákány Béla: *A második triumvirátus*, SZEGED 12. évf. 11. szám (2000), 21–33.

[4] Csirik János – Horváth Gyula: *A szegedi iskoláról*, Természet Világa Informatika különszám, (2000), 24–26.

[5] Erdős Pál: *Néhány személyes és matematikai emlékem Kalmár Lászlóról*, Matematikai Lapok **25** (1974), 253–255.

[6] *KALMÁRIUM.* Kalmár László levelezése magyar matematikusokkal (Dávid Lajos, Erdős Pál, Fejér Lipót, Grünwald Géza, Kertész Andor, Kőnig Dénes, Rédei László, Rényi Alfréd, Riesz Frigyes, Szele Tibor, Turán Pál, Varga Tamás). Összeáll.: Szabó P. G., Szeged, (2005). Polygon. 476 p.

[7] *KALMÁRIUM II.* Kalmár László levelezése magyar matematikusokkal (Aczél János, Fenyő István, Gyires Béla, Hajós György, Lakatos Imre, Lázár Dezső, Neumann János, Radó Tibor, Surányi János, Szénássy Barna, Szőkefalvi-Nagy Béla, Vincze István). Összeáll.: Szabó P. G., Szeged, (2008). Polygon. 424 p.

[8] Kalmár László: *Integrállevél* (Matematikai írások), Szerk.: Varga Antal, Gondolat, Budapest, (1986).

[9] Péter Rózsa: *Kalmár László matematikai munkássága*, Matematikai Lapok **6** (1955), 138–150.

[10] Varga Antal – Makay Árpád: *Korai évek: a Kalmár-iskola.* In: Raffai Mária: Az informatika fél évszázada, Springer, (1997), 395–398.

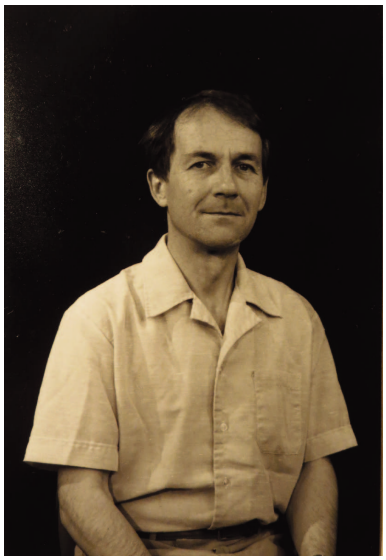
[11] Varga Antal: *Kalmár László, a magyarországi számítástudomány atyja.* Polygon VII. kötet, 1. szám (1997), 3–29.

[12] Varga Antal: *Kalmár László, az ember.* Polygon XI. kötet, 2. szám (2002), 5–16.

SZABÓ PÉTER GÁBOR
SZTE
Kalmár László Informatikai Intézet
E-mail: pszabo@inf.u-szeged.hu

Alkalmazott Matematikai Lapok **32** (2015), 95-101.

KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA (1939-2015)



Viszaemlékezés Kovács László Béla tanítványomra és barátomra

Kovács Laci 1962-ben végzett az ELTE matematika szakon. Tanulmányai során aktív résztvevője volt az operációkutatási előadásaimnak, melyeket 1958 őszétől rendszeresen tartottam az akkori Valószínüségszámítási Tanszék keretei között. 1956-tól 1968-ig ott volt a főállásom (1963-ig adjunktusként, majd docensként), de 1959-ben vezetője lettem másodállásban az MTA Matematikai Kutató Intézetében akkor létrejött, a Matematika Közgazdasági Alkalmazásai Csoportnak. A csoport mindössze négy taggal alakult meg és működött 1962-ig, amikor sikerült egy új tagot felvennem, ez volt a frissen végzett Kovács Laci. Később a csoport bővült kutatókkal és aspiránsokkal, 1970-ig működött a Matematikai Kutató Intézetben.

Kovács Laci kutatási témája a diszkrét programozás lett. Nagy energiával látott munkához, ebből a témából jelent meg könyve a Bolyai Társulatnál 1969-ben, melynek bővitett és átdolgozott kiadása angolul is megjelent az Akadémiai Kiadónál 1980-ban, Combinatorial Methods of Discrete Programming címmel. A két könyv általam szerkesztett sorozatokban jelent meg, az angol nyelvü könyv a Mathematical Methods of Operations Research című sorozatban. Ennek során

alaposan áttanulmányoztam Laci könyveit, és sokat segítettem a végleges változatok létrejöttében, ám magam is sokat tanultam tőle. Itt említem meg, hogy az operációkutatás művelésének van három aspektusa: matematika, alkalmazás és számítástechnika. Csoportom ambícionálta, hogy mindhárom aspektus jelen legyen munkánkban, és Laci volt az, aki leginkább sürgette a számítástechnikai módszerek elsajátítását és alkalmazását.

Az 1960-as évek közepén országos mozgalom indult a felsőoktatás reformja céljából. Ennek során sikerült elérnem, hogy az ELTE-n tervezett alkalmazott matematikai szakirányok egyikének elfogadták az operációkutatást. A szakirány előkészítése érdekében 1967-1969 között kétéves tanfolyamot szerveztem a Bolyai Társulat keretei között. Ennek során több oktatási anyagot dolgoztunk ki, melyek a társulat könyveiként megjelentek. A tanfolyam egyben lehetőséget nyújtott az operációkutatási módszerek elsajátítására azok számára, akik korábban végezték az egyetemet. Laci ennek a tanfolyamnak egyik előadója volt, és az említett diszkrét programozással foglalkozó könyve (a Bolyai Társulat kiadásában) ennek a tanfolyamnak volt a kiadványa.

1970-ben a csoport átkerült az MTA Számítástechnikai Központjába, ekkor azonban már Operációkutatási Osztály lett. Ezen belül volt egy Diszkrét Programozás Csoport, Laci lett a vezetője. 1973-ban a Számítástechnikai Központot egyesítették az MTA Automatizálási Kutató Intézettel, létrejött az MTA SZTAKI. 1970-ben az új osztály helyettes vezetője Majthay Antal lett, frissen végzett kandidátus. Ő azonban egy év mulva az USA-ba távozott, és a helyettesem Kovács Laci lett. 1975-ben az igazgató vezetőváltoztatást hajtott végre, és Laci lett az osztályvezető. Laci ezt áldozatosan vállalta el, hogy mentse az osztályt, minden lényeges kérdésben velem egyetértésben döntött. Ez az állapot két évig állt fenn, mert az Akadémia főtitkára új szervezeti formát adott az intézetnek, főosztályokat hozott létre, ennek során alakult meg az én vezetésemmel az Alkalmazott Matematikai főosztály. Ennek egyik osztálya lett az Operációkutatási Osztáy Kovács Laci vezetésével.

Így érkeztünk el 1985-höz, amikor Laci is és én is megszűntünk a SZTAKI vezető beosztású kutatói lenni. Tanulságos, hogy mi történt Lacival. Behívatták az intézet központjába, ahol belügyes emberek rá akarták venni, hogy jelentéseket írjon a hozzá közel állókról. Ez valószínűleg elsősorban engem jelentett. Laci feldúltan hozzám rohant utána, elmondta, hogy a jelentésírást kereken megtagadta, és úgy ítélte meg, hogy ha itthon marad, akkor állandó zaklatásnak lesz kitéve. Dániai kapcsolatunk révén, meghívást kapott a Koppenhágai Egyetem Számítógéptudományi Tanszékére oktatónak. Később professzor lett, letelepedett Koppenhágában, és arról az egyetemről ment nyugdíjba. (Én ugyanabban az évben, vagyis 1985-ben az USA-ba távoztam, ahonnan az idén megyek nyugdíjba).

Laci óriási energiával dolgozott, az elméletben, gyakorlatban és a számítástechnikai módszerekben egyaránt otthon volt, mint operációkutató. Az 1985 utáni munkásságát kevésbé ismerem, azt azonban tudom, hogy a Koppenhágai Egye-

tem megbecsült professzora volt. Az operációkutatás hazai elterjesztésében lojális harcostársam volt. Emberileg nemes és tiszta, amint az 1985-ben vele történtek mutatják, de számos egyéb epizód is említhető volna. Laci annak ellenére, hogy letelepedett Dániában, nagy magyar patrióta volt.

Az utóbbi években ritkán találkoztunk, elsősorban az ide-oda való utazásaink miatt, barátságunk azonban nem szűnt meg, erős szálak kötöttek össze bennünket.

Budapest, 2015. január 13.

Prékopa András

Pillanatok Kovács László Béla életéből

Édesapám, Kovács László Béla, 1939. augusztus 25-én született Budapesten. Szülei, Gosztonyi Ilona és Kovács Mihály Béla elváltak, de frissen újra összeházasodtak, így nála 8 évvel idősebb nővérével bár édestestvérek voltak, mégis két különböző házasságból származtak. Szüleik hamarosan ismételten elváltak, s Gosztonyi Ilona egyedül nevelte gyermekeit belvárosi lakásukban, a Molnár utca 27. szám alatt.[1]

Elérvén az iskolás kort, KLB a Molnár utca végen lévő Irányi Dániel Általános Iskolába kezdett el járni. Életre szólóan meghatározó élmény volt számára ez a

[1]KLB ebben a házban élt végig Dániába menetele előtt, s utána is ide tért vissza. A ház 1886–87-ben épült (pontosan 99 évvel Dániába menetele előtt) s Kallina Mór tervezte neoreneszánsz stílusban. Képek a házról: https://www.flickr.com/photos/ /76641279@N04/sets/72157646368874455/

hely, többet mesélt ottani élményeiről, mint az intim családiakról. Tudni kell, hogy 1955-ig az Irányi gyakorló jellegű általános iskola volt a tanárképzés számára. Emiatt több tárgyból kimagasló minőségű oktatóik voltak, s az osztályon való gyakorlatozás miatt a kisdiákok a tananyagon túl a tanítás folyamatába is beleláttak és „beleszerettek". Ott alapozódott meg, hogy felnőttként KLB kiváló egyetemi tanár lett: rengeteget készült minden előadásra, fűtött lelkesedéssel adta le óráit, s vezette diákjai projektjeit. Saját tanulási folyamatait is sokszor az vezérelte, hogy az új témát ő egyszer majd oktathassa.

Irányis osztálytársai között ott volt Karácsonyi Rezső, akivel egész életre szóló barátságban voltak. Ő később a fizikai kémia szakterületet választotta, és szintén oktató és tankönyvíró lett.

Saját bevallása szerint KLB már akkor tudta, hogy matematikus szeretne majd lenni, amikor még nem is tudta, mi az a matematika: már egész kicsi gyerekként érdekelték olyan témák, melyekről később megtudta, hogy a matematikához tartoznak. Egyértelmű volt hát, hogy a középiskola után ezt a szakot választotta az ELTE-n. 1962-es végzése után rögvest elhelyezkedett az MTA Matematikai Kutató Intézetében a diszkrét programozás és operációkutatás szakterületén, erről s később SZTAKI-beli munkásságáról és vezetői szerepeiről emlékezik meg fent szépen és alaposan Prékopa András, akinek révén odakerült. 1972-ben tette le a kandidátusi vizsgát. Szintén a 70-es évek elején eltöltött egy évet egy New Orleans-i egyetemen.

Az egyik fő alkalmazási terület, amivel a SZTAKI-ban dolgozott, a gyártási folyamatok optimalizálása volt, fő projektjükként itt a dunai vasműbeli termelésirányítást kell megemlíteni.

SZTAKI-beli szerepeiben teljes mértékben követte és betartotta a társadalom által diktált hivatalos játékszabályokat, de ha lelkiismerete úgy kívánta, szemrebbenés nélkül kiállt a hatalommal szemben, s védte kutatócsoportja érdekeit személyes áldozatok révén is.

Látván, hogy ideje és energiája egyre nagyobb részét a politikai iszapbirkózás emészti fel, 1985-ben megpályázott, és meg is kapott egy oktatói és kutatói állást a Koppenhágai Egyetem Számítástudományi Karán, dán nevén DIKU (Datalogisk Institut ved Kobenhavns Universitet), mely éppen expanzív fázisban volt. Ezen álláslehetőség részint Jakob Krarup professzornak is köszönhető, akivel Prékopa András és budapesti operációkutató csoportja, így KLB is, már sok éve jó kapcsolatban állt.

Koppenhága

1985 nyarán ment Koppenhágába, formális keretek között, tehát munkavállalási és letelepedési engedéllyel, mind a magyar, mind a dán hatóságok részéről.

A Koppenhágai Egyetem követelménye annyi volt az oktatói stábtól, hogy az időnek kb. 10%-át adminisztratív tevékenységekre kell fordítani, 40%-át oktatásra és 50%-át kutatásra, ez utóbbit természetesen rendszeres publikációval bizonyítva.

Viszont ezen általános irányvonalakon túl, nagymértékben a munkatársak maguk határozhatták meg, hogy ki mivel s hogyan foglalkozott.

A DIKU-ba érkezvén KLB egy eredeti és merész lépést tett, mely meghatározta az eljövendő 20 éves dániai szakmai munkásságát. Ahelyett, hogy a már létező több fős operációkutatási csoporthoz csatlakozott volna, szakterületet váltott a Prolog alapú logikai programozás / tudásreprezentáció / szakértő rendszerek felé.[2] Általánosan mesterséges intelligencia – angolul Artificial Inteligence, vagy csak AI – néven is ismert ez a terület, de KLB nem kedvelte ezt a kifejezést, mindjárt visszatérek arra, hogy miért nem. Budapesten, a Műegyetemen már a 70-es évek közepétől eljárt Prolog szemináriumokra, s most ezt a tudását vette előtérbe, látván, hogy a logikai programozásnak akkor pusztán egy képviselője volt a Koppenhágai Egyetemen. Ő Gregers Koch volt, aki a logikai programozással való nyelvi elemzést kutatta, KLB számára tehát nyitva állt minden más felhasználása ennek a relatív új területnek.

A téma egyik fő alkalmazása, ami legszembetűnőbb a publikációs listáról is, az építészet és várostervezés volt, mivel volt két együttműködő építész partnere: Per Galle és Kotsis István.

Példaként további alkalmazási területekre az orvosi diagnosztikát, irodai levegőminőséget és a Prolog-adatbázis interface-t említeném, természetesen minden téren szakértőkkel dolgozva együtt, akik a Prolog-rendszerben reprezentálandó tudást hozták; KLB magának a reprezentációs folyamatnak volt a szakértője a Prolog nyelven keresztül.

Mint már jeleztem, a népszerű „mesterséges intelligencia” kifejezést KLB kifejezetten nem kedvelte, s ha csak lehetett, egyáltalán nem használta. Nagyon tudatos volt ugyanis, hogy ezt a kutatási területet nem az emberi intelligencia helyettesítésére szánja, hanem saját megfogalmazásában úgy, mint „nagyon flexibilis rendszerek az emberi gondolkodás és kreativitás támogatására és stimulálására”, mindez a legszélesebb értelemben.

Ezt természetesen a diákjai között is terjesztette. Alapéves[3] kurzusait például azzal kezdte, hogy az „adat”, „információ” és „tudás” közötti lényegbevágó különbséget leszögezze. Ez triviálisnak tűnhet, de egyáltalán nem az, s szerény véleményem szerint a mai társadalomban széles körben továbbra is sokan keverik ezen fogalmakat, aminek is eszméletlen mennyiségű idő és energiapazarlás az eredménye.

Személyes aspektusok

1961-ben házasságot kötött a Szalontai Erzsébettel, hét évvel később elváltak.

1974-ben ismét megházasodott, Farsang Adriannával. Ezen második házasságából származik két fia: jelen sorok írója és testvérem Kovács Márton Miklós.

[2]Egy jó magyar nyelvű Prolog áttekintés: Szeredi Péter & Szeredi Tamás „A Prolog nyelv és a logikai programozás áttekintése” az internetről is letölthető (Google keresés kiadja a pdf-et).

[3]KLB vezette be a logikai programozást az alapéves képzésen a DIKU-ban.

A Molnár u. 27. szám alatti ház így, akárcsak KLB-nek, nekünk is a gyerekkorunk színhelyét képezte a 70-es, 80-as években, s szintén az Irányiban végeztük az általános iskola első éveit.

A Dániába költözés körül második feleségével is elváltak egymástól, így Koppenhágában egyedül nevelt bennünket.

További érdeklődési területei

KLB számára soha nem volt éles válaszvonal a szűk értelemben vett szakmai és a további tevékenységei között. Foglalkoztatta például a 60-as években a Go nevű japán játék, melynek magyarországi elterjesztéséhez nagyon aktívan hozzájárult, többek között azt hiszem, ő kezdeményezte az első Magyarországon gyártott példányok ipari gyártását. Ennek a játéknak a lényege a kétdimenziós tér értelmezése és átérzése, akárcsak a jóval egyszerűbb pentominónak, amit rendszeresen alkalmazott az oktatásban. A tér alkalmazása körüli elmélkedés természetesen alapját képezi a lakás és várostervezésnek is, ami mint feljebb láttuk, egyik fő tudásreprezentációs kutatási területe lett a koppenhágai évei alatt. A térélmény egy további dimenziója a festészet, amit KLB egész életében igen kedvelt, utolsó éveiben főleg a nonfiguratív változataiban.

Egy másik nagy érdeklődési területe a nyelv volt, mind mesterséges, mind természetes formáiban. A 60-as, 70-es években főleg a SIMULA programozási nyelvvel dolgozott, aztán főleg Prolog-gal. Sok-sok óraidő- és energiabefektetéssel megtanult angolul, franciául, oroszul, japánul, dánul, végül spanyolul és valamennyire szanszkritul is. Beszélt kommunikációra a magyaron kívül főleg az angolt, s valamennyire a dánt használta; a többire, azt hiszem, nagyrészt a nyelvi struktúrákba, a szókincsbe és az eredetiben olvasott irodalomba való beletekintés sarkallta.

Amint már Prékopa András is megpedzette a fentiekben, KLB igen értékesnek tekintette és végig ápolta magyarságát Dániában is. Nem csak az irodalom, zene és képzőművészetek folyamatos élvezete által, hanem aktív szerepet töltvén be a Koppenhágai Hamvas Béla Magyar Klubban, melynek alapítója közeli barátunk, Lázár Ervin János volt. Ebben a közösségben való tevékenységéről, különösen a Látókörnek nevezett rendszeres összejövetelekről bő információ olvasható Ervin „Látókörös László Búcsúztató” című nekrológjában, mely az interneten megtalálható.[4]

Befejezésképpen egy pár szót KLB spiritualitásáról. Már a 80-as évektől kezdve foglalkozott a buddhizmussal, s a 90-es években lett aktív buddhista. Olvasmányaiban és gyakorlataiban végül főleg a tibeti hagyományokat követte. Amikor 2005-ben visszatelepült Magyarországra, aktív tagja lett a Tan Kapuja Buddhista Egyháznak és Főiskolának. Miután a teljesen váratlan aneurizma miatti agyvér-

[4]Látókörös László Búcsúztató: https://www.facebook.com/notes/ervin-lazar/l%C3%A1t%C3%B3k%C3%B6r%C3%B6s-l%C3%A1szl%C3%B3-b%C3%BAcs%C3%BAztat%C3%B3/ /861700150539159

zéstől a létből a nem-létbe kellett lépjen, természetesen ezen közösség végezte gyönyörű búcsúztatási szertartását is.[5]

Matematikus, operációkutató, szakértője a számítógépes tudásreprezentációnak és az elme természetének, egyetemi tanár és fáradhatatlan hídépítő a humánreál szakadék fölött; a magyar és európai értelmiségi hagyomány kiemelkedő személyisége hagyott el bennünket; fiai, tanítványai és barátai ki-ki a maga módján, de folytatjuk vonalait.

Madrid, 2015. március

Kovács Kászon Balázs

[5]A Tan Kapuja Buddhista Egyház megemlékezése: http://www.tkbe.hu/emlekoldal/kovacs-laszlo-bela